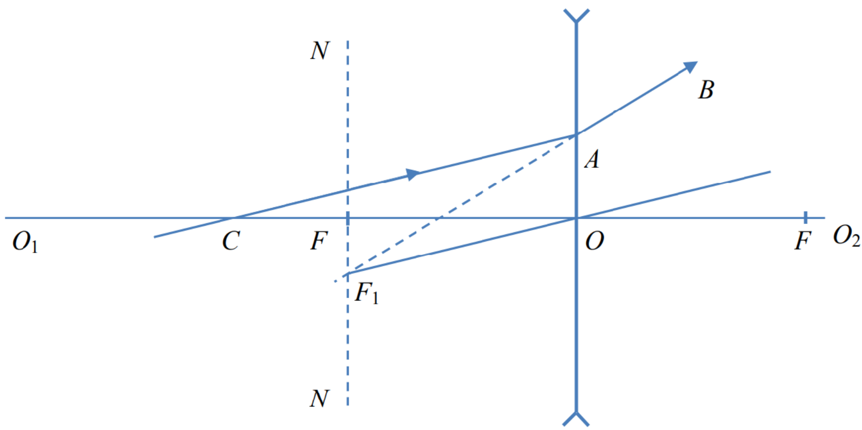
Eesti koolinoorte 29. füüsika lahtine võistlus

24. november 2018. a. Noorema rühma ülesannete lahendused

1. (*VALGUSKIIR NÕGUSLÄÄTSES*) Joonistame läbi läätse ees oleva fookuse fokaaltasandi. Läätsele tulev kiir murdub läätses nii, et selle pikendus läbib fokaaltasandi punktis, kus optiline kõrvaltelg lõikub fokaaltasandiga. Nüüd saab joonistada optilise kõrvaltelje, mis läbib punkte F_1 ja O. Läätsele langev valguskiir, mis pärast murdumist läätses on AB, on enne läätse paralleelne optilise kõrvalteljega ja läbib läätse punkti A. Seega on see kiir CA. (*6 p.*) *Autor: Koit Timpmann.*



2. (*JÄÄVESI*) Kogu jää sulab ära, seega ei ole tekkinud jäävee temperatuur 0 kraadi. Soojuslikust tasakaalust saame leida jäävee temperatuuri - Q_1 - vee soOjenemine, Q_2 - jää soojenemine 0 kraadini, Q_3 - jää sulamine, Q_4 - jää sulamisel tekkinud vee soojenemine.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$Q_1 = c_v m_v (t_v - t) = 4200 \cdot 0{,}3(20 - t) = (25200 - 1260t)\mathrm{J}$$

$$Q_2 = c_j m_j (0 - t_j) = 2000 \cdot 0{,}05\,(0 - 20) = 2000\,\mathrm{J}$$

$$Q_3 = \lambda m_j = 330000 \cdot 0,05 = 16\,500\,\mathrm{J}$$

$$Q_4 = c_v m_j (t - 0) = 4200 \cdot 0,05(t - 0) = (210t)\mathrm{J}$$

$$c_v m_v (t_v - t) = c_j m_j (0 - t_j) + \lambda m_j + c_v m_j (t - 0)$$

$$25200 - 1260t = 2000 + 16500 + 210t$$

$$t = 4{,}6\,^\circ\mathrm{C}.$$

(*6 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*

3. (*VOLTMEETRID*) Kuna esimene voltmeeter on ühendatud rööbiti pingeallikaga, siis $U_1 = 30\,\mathrm{V}$. Samuti on selge, et ka $U_2 + U_3 = U_0$. Ideaalse voltmeetri takistus on lõpmatult suur, rööbiti ühendatud takisti ning voltmeetri takistus aga lõplik. Järelikult on skeemi keskmises osas kogu pingelang kolmandal voltmeetril ehk $U_2 = 0\,\Omega$ ning $U_3 = 30\,\mathrm{V}$.
(*8 p.*) *Autor: Eero Vaher.*

4. (*KORGIST KERA*) Kuna kera ujub, siis on kerale mõjuv üleslükkejõud võrdne kerale mõjuva raskusjõuga. Kuna kerast on pool vee all, saame võrrandi:

$$\frac{1}{2}\rho V g = m_t g + m_k g$$

Kus $V = \frac{m_t}{\rho_t} + \frac{m_k}{\rho_k}$ on kera ruumala.

$$\frac{\rho}{2}\left(\frac{m_t\rho_k + m_k\rho_t}{\rho_t\rho_k}\right) = m_t + m_k$$

Et teisendusi lihtsustada, saame teadaolevatest suurustest moodustatud avaldise ümber tähistada, näiteks tähistame $\frac{2\rho_t\rho_k}{\rho} \equiv c$. Niisiis:

$$m_t\rho_k + m_k\rho_t = c\,(m_t + m_k)$$

Kuna kera kogumass on $m = m_t + m_k$, on otsitav suhe $\frac{m_t}{m_t+m_k}$. Selle saamiseks avaldame m_k:

$$m_k\left(\rho_t - c\right) = m_t\left(c - \rho_k\right)$$

$$m_k = m_t\left(\frac{c-\rho_k}{\rho_t - c}\right)$$

Siit otsitav suhe:

$$\frac{m_t}{m_t + m_k} = \frac{m_t}{m_t + m_t\left(\frac{c-\rho_k}{\rho_t-c}\right)} = \frac{1}{1+\frac{c-\rho_k}{\rho_t-c}} = \frac{1}{1+\frac{2\rho_t\rho_k-\rho_k\rho}{\rho_t\rho-2\rho_t\rho_k}} = 61.7\%$$

(*8 p.*) *Autor: Koit Timpmann.*

5. (*KÄRBES*) Minimaalne kaugus on siis, kui kärbes läbib optilist peatelge. Kärbes ja tema kujutis on sel hetkel läätsest kahekordse fookuskauguse kaugusel. Kuna nii kärbes kui ka tema kujutis on läätsest sama kaugel, on kujutise suurendus 1, mistõttu kujutise liikumiskiirus on sama, mis kärbse liikumiskiirus, ehk $u = v = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$. (*10 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*

6. (*MURTUD LÄÄTS*) Murtud läätse võime vaadelda kahe erineva läätsena. Mõlemad läätsed tekitavad kujutise punkti S'. Sarnastest kolmnurkadest saame leida, kui kaugel k asub kujutis pärast läätse murdmist. Kuna alguses asub valgusallikas kahekordse fookuskauguse kaugusel, siis asub ka kujutis läätse $2f$ kaugusel. Kolmnurgast $\triangle AOF_1$ saame, et $OA = AF_1 = \frac{f}{\sqrt{2}}$.

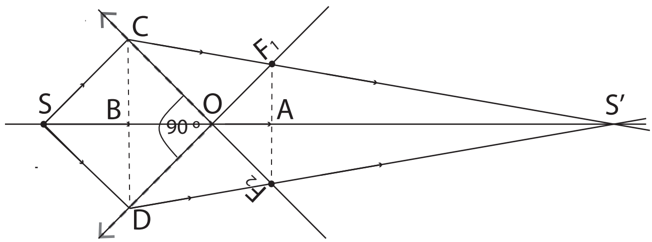
Vaatleme sarnaseid kolmnurki $\triangle AS'F_1$ ja $\triangle BS'C_1$.

$$\frac{CB}{F_1A} = \frac{BS'}{AS'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f}{\frac{f}{\sqrt{2}}} = \frac{f+k}{k-\frac{f}{\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{2}k - f = f + k \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2f}{\sqrt{2}-1}$$

Enne läätse murdmist asus valgusallika kujutis läätsest kaugusel $2f$, seega kaugenes uus kujutis

$$\frac{\frac{2f}{\sqrt{2}-1}}{2f} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad \text{korda.}$$



(*10 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*

7. (*LIIKLUSUMMIK*) Olgu algselt kõik valgusfoorivahemikud seisvaid autosid täis. Vaatleme esialgu nii-öelda 1. valgusfoori tänava lõpus, pärast mida autod vabalt liikuda saavad. Ajahetkel $t = 0$ s läheb see valgusfoor roheliseks ning ajahetkel $t = 1$ s hakkab sõitma esimene auto ning saab vabalt liikuda eelduse järgi, et tänava lõpus on piisavalt ruumi. Ajahetkel $t = 2$ s hakkab sõtma teine auto jne. Kuna kõik autod liiguvad võrdse kiirendusega $a = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$, kuid alustavad 1 s vahedega, siis ükski auto eelmisele otsa ei sõida ning kõik autod saavad vabalt liikuda. Leiame nüüd, mitu autot jõuab rohelise tule ajal $t_2 = 30$ s valgusfoori läbida.

Olgu n valgusfoori taga seisva auto järjenumber. Tulenevalt juhtide reaktsiooniajast hakkab järjekorras kohal n olev auto sõitma ajahetkel $t_{n1} = nt_r = n$ s ning foorini jõudmiseks (punase tule süttimiseni) on tal aega $t_{n2} = 30 - n$ s. Selle ajaga jõuab ta läbida $s_{n2} = \frac{at_{n2}^2}{2} = \frac{(30-n)^2}{4}$ m. Pärast sõitma hakkamist peab see auto läbima vahemaa tema seisukoha ja valgusfoori vahel $s_n = (n-1)s_0 = 5(n-1)$;m (esimene auto seisab vahetult valgusfoori all, seega tema saab kohe valgusfoori läbida). Selleks, et auto jõuaks foori peatumata läbida peab kehtima võrratus

$$\frac{(30-n)^2}{4} \geq 5(n-1).$$

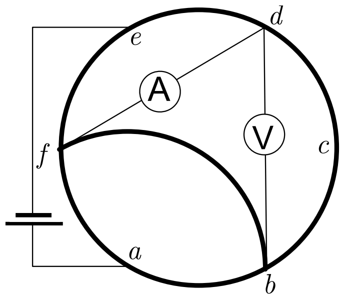
Suurim n, mille korral see võrratus on täidetud, on $n = 13$. Kuna pidurdamiseks kuluv aeg on eelduse kohaselt väike, võib järelikult eeldada, et 14. auto saab enne valgusfoori pidama ning 13. jõuab vabalt läbi sõita.

Vaatleme nüüd uuesti kogu tänavat. Kuna algselt kõik autod seisid, oli iga valgusfoori taga $n_0 = s/s_0 = 300/5 = 60$ autot. Ajahetkel $t = 30$ s on vaadeldud 1. valgusfoori tagant lahkunud $n_1 = 13$ autot, mistõttu oleks seal nüüd ruumi $n_1 = 13$ seisvale autole. Kuna iga auto reageerib eelnevale, siis hakkavad autod täitma vahetult valgusfoori ees olevat vahemikku. Kuna eelnevad autod on eest ära sõitnud, saab ajahetkel $t = 31$ s sõitma hakata järjekorras 31. auto (jne.) hoolimata sellest, et valgusfoori tuli on punane. Viimane ehk 60. auto selles vahemikus saab sõitma hakata ajahetkel $t = 60$ s ehk täpselt siis, kui kõik valgusfoorid uuesti roheliseks muutuvad. Kuna see auto eest ära sõitis, saab nüüd ajahetkel $t = 61$ s rohelise tule peale sõitma hakata ka 2. valgusfoori ees seisev auto. 2. valgusfoori ees seisvad autod hakkavad sõitma täpselt samamoodi nagu 1. valgusfoori ees seisnud autod ning neist jõuab rohelise tulega läbi samuti $n_2 = 13$ autot. Kuna eelmise fooritsükkli jooksul sõitis 1. foori eest ära $n_1 = 13$ autot, on selles vahemikus (1. ja 2. valgusfoori vahel) kindlasti ruumi nendele $n_2 = 13$ autole, kes 2. valgusfoori eest tulevad ning nad kõik saavad vabalt sõita. Seega jääb autode koguarv kahe foori vahel nüüd (ja edaspidi) iga fooritsükkli järel konstantseks ning järgmise fooritsükli ajal on seal jälle ruumi tagant tulevatele autodele. On selge, et see protsess hakkab tsükkliliselt korduma ning analoogselt saavad sõitma hakata kõigi järgnevate valgusfooride taga seisvad autod. Seega väljub ummikust iga fooritsükkli $T = t_1 + t_2 = 30\,\mathrm{s} + 30\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{min}$ jooksul $N = n = 13$ autot iga sõidurea kohta. Seega ongi ühe sõidurea läbilaskmisvõime kogu tänava jaoks $\sigma = N/T = 13$ autot/min.

Eelnevast aruteust järeldub, et iga edasiliikumisega liigub iga ummikus seisev auto edasi $n_1 = 13$ auto võrra ehk $s_1 = 5 \cdot 13 = 65$ m. Seejuures väheneb tema järjekorranumber foori taga $n_1 = 13$ võrra, seega uuesti pääseb see auto liikuma $T_1 = 60 - 13 = 47$ s pärast. Kui auto järjekorranumber foori taga on $n \leq 13$, jõuab ta foori läbida, ning tema uueks järjekorranumbriks eesoleva foori saab $n + 47$, nii et ta pääseb uuesti liikuma samuti juba $T_1 = 47$ s pärast. Järelikult on autode liikumise keskmine kiirus ummikus

$$v = s_1/T_1 = 1{,}38\,\mathrm{m/s} = 5\,\mathrm{km/h}.$$

(*12 p.*) *Autor: Jonatan Kalmus.*



8. (*RING*) Teeme ekvivalentskeemi, vt joonis, kus ideaalse ampermeetri asendame traadiga ning ideaalse voltmeetri kõrvaldame. Et voltmeeter on kinnitatud punktide b ja d vahele, siis peame leidma pinge takistil $2R$. Kirhoffi vooluseaduse tõttu näitab ampermeeter ülemise vasakpoolse takisti R ning ülemise takisti $2R$ voolude vahet. Takistus d ja a vahel on takistite R ja $2R$ rööpühendus, st $\frac{2}{3}R$ ning d ja e vahel — $\frac{1}{2}R$; seega kogutakistus on $\frac{7}{6}R$. Voolutugevus läbi patarei on $I_0 = \frac{6}{7}\frac{\mathcal{E}}{R}$ ning see jaguneb punkte d ja a ühendava ülemise ja alumise haru vahel takistuste suhte vahekorras 1:2, st ülemisse harru läheb vool $I = \frac{1}{3}I_0 = \frac{2}{7}\frac{\mathcal{E}}{R}$. Pinge d ja b vahel saame Ohmi seadusest, $U = IR = \frac{2}{7}\mathcal{E} = 2\,\mathrm{V}$. Läbi ülemise vasakpoolse takisti läheb pool koguvoolust, $I_1 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{7}\mathcal{E}$ ja takistit $2R$ läbib vool $I_2 = \frac{U}{2R} = \frac{1}{7}\mathcal{E}$. Seega ampermeeter näitab voolu $I_A = I_2 - I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{7R} = 2\,\mathrm{A}$. (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.*

9. (*UPPUV PUDEL*) Esimese sammuna leiame pudelis oleva õhu ruumala. Et klaasi ruumala $V_k = m_k/\rho_k = 100\,\mathrm{ml}$, siis pudeli koguruumala on $V_p = 500\,\mathrm{ml} + V_k = 600\,\mathrm{ml}$ ning veealuse osa ruumala (mis põhjustab üleslükkejõu) $V_A = V_p - V_0 = 590\,\mathrm{ml}$. Et üleslükkejõud on võrdne pudeli kaaluga, siis vee pluss pudeli mass on võrdne väljatõrjutud vee massiga, seega vee mass pudelis $m_v = V_A\rho_v - m_k = 340\,\mathrm{g}$. Niisiis vee ruumala pudelis $V_v = m_v/\rho_v = 340\,\mathrm{ml}$ ja õhu ruumala pudelis $V_t = 500\,\mathrm{ml} - V_v = 160\,\mathrm{ml}$. Uppumiseks peab see vähenema V_0 võrra; sel juhul:

$$\frac{V_0}{V_t} = \alpha_v \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{V_0}{V_t}\frac{1}{\alpha}$$

Kus Δt on temperatuuri muutus. Siit uppumistemperatuur $T = t_0 - \Delta t \approx 6{,}6\,^\circ\mathrm{C}$. (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.*

10. (*KAHURID*)

Vaatleme kuulide liikumist kahes tasapinnas - horisontaalne ning vertikaalne. Horisontaalses tasapinnas liiguvad kahurikuulid kogu aeg ühtlase kiirusega (v_{Ax} ja v_{Bx}):

$$v_{Ax}(t) = v_A \cos\alpha, \qquad v_{Bx}(t) = v_B \cos\beta.$$

Vertikaalsuunas saab vaadelda kahurikuulide liikumist kui vabalangemist, kus kuulide kiirused on vastavalt

$$v_{Ay}(t) = v_A \sin\alpha - gt, \qquad v_{By}(t) = v_B \sin\beta - g(t - \Delta T).$$

Ülesannet on mugavam lahendada pannes kahurikuuli A liikumisvõrrandid kirja kahuri B tulistamise suhtes. Sel hetkel olgu kuuli A kiirus v_1, nurk horisondi suhtes α_1 ning horisontaalne ja vertikaalne kaugus kahurist B vastavalt l_1 ja h_1. Sellisel juhul

$$l_1 = l - v_A \cos\alpha\Delta T = 272{,}5\,\mathrm{m},$$

$$h_1 = v_A \sin\alpha\Delta T - \frac{g(\Delta T)^2}{2} = 243{,}4\,\mathrm{m},$$

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{v_{Ay}(\Delta T)}{v_{Ax}(\Delta T)}\right) = \arctan\left(\frac{v_A \sin\alpha - g\Delta T}{v_A \cos\alpha}\right) = 5{,}25^\circ,$$

$$v_1 = \sqrt{v_{Ay}(\Delta T)^2 + v_{Ax}(\Delta T)^2} =$$
$$= \sqrt{(v_A \sin\alpha - g\Delta T)^2 + (v_A \cos\alpha)^2} = 121{,}75\,\mathrm{m/s}.$$

Saagu kuulid kokku ajal $t = t_1 + \Delta T$. Kuulide kokkusaamise hetkel peavad mõlema kuuli x- ja y-koordinaadid ühtima, ehk

$$v_1 \cos\alpha_1 t_1 + v_B \cos\beta t_1 = l_1,$$

$$h_1 + v_1 \sin\alpha_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = v_B \sin\beta t_1 - \frac{gt_1^2}{2}.$$

Asendades ühest võrrandist t_1 teise võrrandisse, saame

$$v_B l_1 \sin\beta - h_1 v_B \cos\beta = v_1(h_1 \cos\alpha_1 + l_1 \sin\alpha_1).$$

Asendades $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$, saame ruutvõrrandi $\sin\beta$ jaoks, mille lahendid on $\sin\beta = 0{,}929; -0{,}264$. Negatiivse nurga alt ei saa aga kahurikuuli lasta, sest maapind tuleb ette. Seega $\beta = \arcsin 0{,}929 = 68{,}2°$. Siit asendades β väärtused esimesse võrrandisse saame

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1 \cos\alpha_1 + v_B \cos\beta} = 1{,}39\,\mathrm{s}, \quad t = t_1 + \Delta T = 7{,}39\,\mathrm{s}$$

(*12 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*