Eesti koolinoorte 57. füüsikaolümpiaad

16. jaanuar 2010. a. Piirkondlik voor. Gümnaasiumi ülesannete lahendused

Eessõna

Allpool on toodud iga ülesande üks õige lahenduskäik (mõnel juhul ka enam). Kõik alternatiivsed õiged lahenduskäigud tuleb hinnata samuti maksimumhindega. Iga alternatiivse lahenduskäigu jaoks tuleb kontrollijatel koostada hindamisskeem, juhindudes võimalusel juuresoleva hindamisskeemi punktijagamisproportsioonist. Soovituslikud maha-arvamise punktid: numbriline arvutusviga — 0,5; viga teisendustes — 0,5 p. (märgi jms väiksem viga) või 1 p. (viga, mis viib dimensioonide konfliktini), maha arvata ainult üks kord, st edasikanduvat viga mitte karistada; kui vastus tuleb füüsikaliselt absurdne, siis võib täiendavalt karistada 0,5 punktiga; üksik viga lähtevalemis: 0,5 p. (kui märgiviga) kuni 50% (sisuline viga).

1. (*EIFFELI TORN*)

Kontrollime, kui kaua kukub raudkuul ülemiselt vaateplatvormilt maapinnale $h = 273$ m maapinnale.

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 7{,}5 \text{ s.} \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Alates hetkest, kui mõlemad kuulid langevad, on nende suhteline kiirus muutumatu, sest mõlemad kuulid on siis vabalt langevas taustsüsteemis paigal. Leiame esimese kuuli kiiruse teise kuuli kukutamise hetkel.

$$v = gt \approx 29{,}4 \text{ m/s.} \quad [\mathbf{3\ p.}]$$

Ajavahemik kuulide maapinnale jõudmisel on sama mis kuulide kukutamiselgi ehk $t = 3$ s. [**1 p.**]

2. (*JÕHVIKAD*)

Vee algtemperatuur oli $t_1 = 100$ °C. Olgu vee mass M ja jõhvikate mass m. Soojushulk jõhvikate soojendamiseks ja sulatamiseks tuleb vee jahtumist arvelt. Vee jahtumisel eraldus soojushulk

$$Q_j = Mc_V(t_1 - t). \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Jõhvikate soojendamise käigus tuli 1) soojendada külmunud jõhvikad sulamistemperatuurini, 2) sulatada külmunud jõhvikad ja 3) soojendada sulanud jõhvikad temperatuurini . Leiame igas etapis kulunud soojushulga.

$$Q_{s1} = mc_j(0 - t_2) = -mc_jt_2, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

$$Q_{s2} = mL, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

$$Q_{s3} = mc_v(t-0) = mc_v t. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

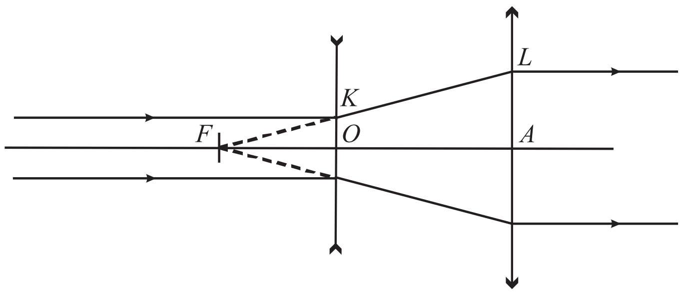
Liidame jõhvikate soojendamiseks kulunud soojushulgad ja võrdsustame saadud summa vee jahtumisel eraldunud soojushulgaga. Saadud võrrandist avaldame vee ja jõhvikate masside suhte.

$$-mc_j t_2 + mL + mc_v t = Mc_V(t_1 - t)$$

$$\frac{M}{m} = \frac{-c_j t_2 + L + c_v t}{c_V(t_1 - t)} \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Arvuliseks vastuseks saame 16. [**1 p.**]

3. (*KIIRTEKIMBU LAIENDI*)



Idee ja joonis (kuna optilise tugevuse väärtusest selgub, et üks läätsedest on nõguslääts, on esimene läätsedest on nõgus-, teine kumerlääts; läätsede fookused paigutuvad samasse punkti ühtsel optilisel peateljel.) [**2 p.**]
Kolmnurkade KOF ja LAF sarnasusest saame, et $\frac{LA}{KO} = \frac{AF}{OF}$. Kuna $LA = 2{,}5\,KO$, siis ka $AF = 2{,}5\,OF$. [**1 p.**]
Nõgusläätse fookuskauguse arvutamine $f = -5$ cm. [**1 p.**]
Kumerläätse fookuskaugus $f = 12{,}5$ cm. [**1 p.**]
Läätsede kaugus teineteisest $d = 7{,}5$ cm. [**1 p.**]

4. (*VEDRU*)

Hetkel, kui tellis hakkab vedrust eemalduma ehk kui vedru on taastanud pärast kokku surumist oma algse asendi, liiguvad vedru ülemine ots ja tellis ühesuguse kiirusega v. [**2 p.**] Tellise kiirus on piisav, et kerkida esialgsele kõrgusele $H \sim v^2$ [**1 p.**] tagasi. Eeldame, et vedru on pikisuunas ühtlane, siis liigub vedru massikese, mis asub vedru keskel kaks korda aeglasemalt, kui vedru ülemine ots. $v_v = v/2$. [**3 p.**] Seega tõuseb vedru masskese kõrgusele $h \sim v_v^2 = v^2/4$ ehk

$$h = \frac{H}{4}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

5. (*VESI JA JÄÄ*)

Soojusvoo võimsus läbi faasi on määrtud valemiga

$$Q = D\frac{S\Delta T}{l}, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

kus S on faasi pindala, l tema paksus, ΔT temperatuuride vahe, D soojusjuhtivuskoefitsient. Vaatleme õhukest kihti vedela ja tahke faasi piirpinnal, mille temperatuur on 0 kraadi. [**1 p.**] Tahkest faasist tuleva soojusvoo võimsus on $Q_t = D_t S T_t / l_t$ [**1 p.**] ja vedelast faasist tuleva voo võimsus on $Q_v = D_v S T_v / l_v$. [**1 p.**] Statsionaarses olukorras, kus piirpinna asukoht ei muutu, on need vood võrdsed. Arvestades, et kahe faasi pindalad on võrdsed, saame tingimuseks:

$$\frac{D_t T_t}{l_t} = \frac{D_v T_v}{l_v}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Esimesel juhul

$$\frac{D_t}{D_v} = \frac{T_{t1} \cdot l_{t1}}{T_{v1} \cdot l_{v1}} = \frac{20 \cdot 4}{20 \cdot 1} = 4, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

sest l_{t1}/l_{v1} oli ülesande tingimuste kohaselt 4. Teisel juhul

$$T_{v2} = \frac{D_t}{D_v} \cdot \frac{l_{t2}}{l_{v2}} \cdot T_{t2}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Asetades arvandmed sisse saame $T_v = 80$ kraadi. [**1 p.**]

6. (*BENJI-HÜPE*)

Hüppe madalaimas punktis on hüppaja kiirus ja seetõttu ka kineetiline energia võrdne nulliga. Gravitatsioonivälja potentsiaalse energia muutus torni tipust selle punktini on võrdne köies tekkinud elastsusjõu energiaga:

$$mg(l + \Delta l_1) = \frac{k\Delta l_1^2}{2} \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

kus Δl_1 on köie pikenemine. Lahendades ruutvõrrandi Δl_1 suhtes, saame

$$\Delta l_1 = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mgkl}}{k} \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

(teine lahend on negatiivne [**0,5 p.**]). Platvormi kõrgus on $h_1 = l + \Delta l_1 + h$. [**0,5 p.**] Arvuline väärtus $h_1 \approx 86$ m. [**0,5 p.**]

Suurima kiiruse leidmisel lisandub energia võrrandisse kineetiline energia:

$$mg(l + \Delta l_2) = \frac{k\Delta l_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Kiirendus muudab märki, kui elastsusjõud saab võrdseks gravitatsioonijõuga. Seetõttu on suurima kiiruse tingimuseks

$$mg = k\Delta l_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta l_2 = \frac{mg}{k}. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Asetades antud tingimuse energiavõrrandisse ja lahendades selle v suhtes, saame:

$$v = \sqrt{\frac{g(gm + 2kl)}{k}} \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Arvuline väärtus $v \approx 29$ m/s. [**0,5 p.**]

7. (*KONDENSAATOR*)

Patarei pinge on $U = \mathrm{const}$ ja vool ahelas, vastavalt ülesande tingimustele, $I = \mathrm{const}$. Patarei võimsus on

$$P_p = UI. \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

Energia kondensaatoris on

$$E = \frac{CU^2}{2}, \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

kus kondensaatori mahtuvus on $C = q/U$ [**1 p.**] ja laeng kondensaatoris q. Kondensaatorisse energia salvestamise kiirus on energia muutumise kiirus kondensaatoris ehk energia tuletis aja järgi,

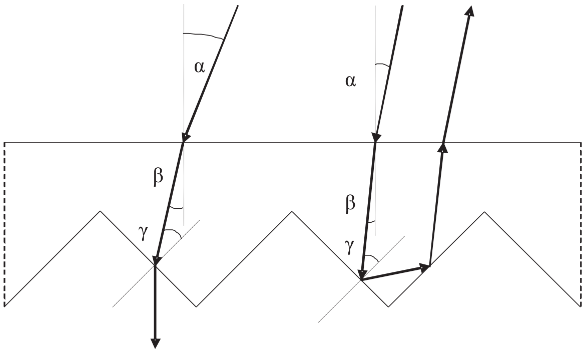
$$P_C = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{CU^2}{2} = \frac{dCU}{dt}\frac{U}{2} = \frac{dq}{dt}\frac{U}{2}.$$

Arvestades, et laengu muutumise kiirus dq/dt on vool I, saame energia salvestumise kiiruseks kondensaatorisse

$$P_C = \frac{UI}{2}. \quad [\mathbf{3\ p.}]$$

Näeme, et patareist "väljub" energiat kaks korda kiiremini, kui seda salvestub kondensaatorisse. Energia, mis ajaühikus kondensaatorisse ei jõua läheb välisjõudude, mis muudavad kondensaatori mahtuvust selliselt, et $I = \text{const}$, vastu töö tegemiseks. [**3 p.**]

8. (*HAJUTI*)



Valgus läbib hajuti, kui nurk γ on väiksem täieliku sisepeegeldumise nurgast. Kriitilisel juhul $\sin(\gamma_{\text{kr}}) = 1/n$. Kuna $\beta = 45° - \gamma$, siis $\beta_{\text{kr}} = 45° - \arcsin(1/n)$. Nurkade α ja β vahel kehtib murdumisseadus $\sin(\alpha)/\sin(\beta) = n$. Seetõttu

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin(n \sin(45° - \arcsin(1/n))).$$

Vastuse saab viia kujule

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n^2-1} - 1)\right]$$

ja selle arvväärtus on 4,8°.

Kriitilisest väiksema α korral (vt parempoolsemat kiirt) on tagasi pöörduv kiir paralleelne hajutile langenud kiirega. Kiirte käigu pööramisel selgub, et tulemus ei muutu, kui esimene sisepeegeldus toimub 45-st kraadist suurema nurga all. Sel juhul toimub nurga γ all teine sisepeegeldus.

<u>*Hindamine*</u>:
Kiirte käigu joonistamine või hajuti tööpõhimõtte kirjeldamine — [**2 p.**]
Täieliku sisepeegeldumise tingimus — [**2 p.**]

Nurkade γ ja β seos — [**1 p.**]
Murdumisseaduse rakendamine — [**1 p.**]
Vastuse avaldamine ja arvväärtuse leidmine — [**2 p.**]
Põhjendus, et tulemus ei sõltu sellest, missugusele tahule valgus esimesena langeb — [**2 p.**]

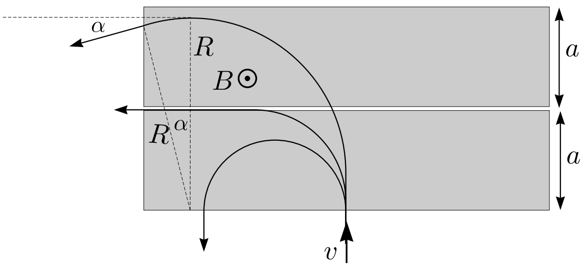
9. (*MAGNETVÄLI*)

Magnetväljas mõjub elektronile Lorentzi jõud $F = Bev$ [**1 p.**], mis on kiirusega kogu aeg risti ning annab elektronile kesktõmbekiirenduse v^2/R [**1 p.**], kus R on trajektoori kõverusraadius. Newtoni teisest seadusest $Bev = mv^2/R$, millest $R = vm/Be$ [**1 p.**].

Et elektroni kiirus ei muutu (energia säilib!), siis ka kõverusraadius ei muutu, st elektron liigub mööda ringjoont raadiusega R. (*Märkus:* kui lahenduses on öeldud detailsema seletuseta, et elektron liigub mööda ringjoont raadiusega $R = vm/Be$, siis võib selle eest anda eelpoolmärgitud punktide summa, st 3 punkti.) Tuues sisse tähistuse $v_0 = aBe/m$, saame eelmise avaldise kirjutada kujul $R = vm/Be = va/v_0$.

Kui $v < v_0$, siis elektron teeb magnetväljas poolringi ning väljub tuldud suunas tagasi, st pöördenurk on π rad [**2 p.**]. Vastva graafikuosa eest [**1 p.**].

Kui $v \approx v_0$, siis saab elektron väljuda mööda kitsast pilu, vt joonist, st pöördenurk on $\pi/2$ rad [**2 p.**]. Vastva graafikuosa eest [**1 p.**].

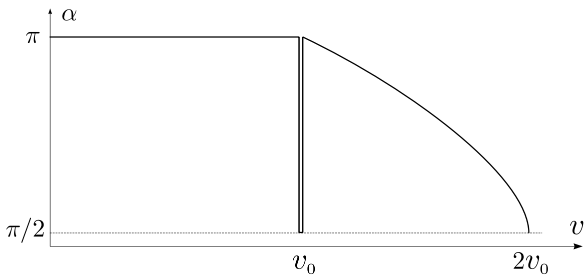


Kiiruse edasisel suurenemisel väljub elektron külgsuunas [**0,5 p.**]; joonise abil on lihtne näha, et väljumisnurk on

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2a - R}{R} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(2\frac{v_0}{v} - 1\right). \quad [\mathbf{1{,}5\ p.}]$$

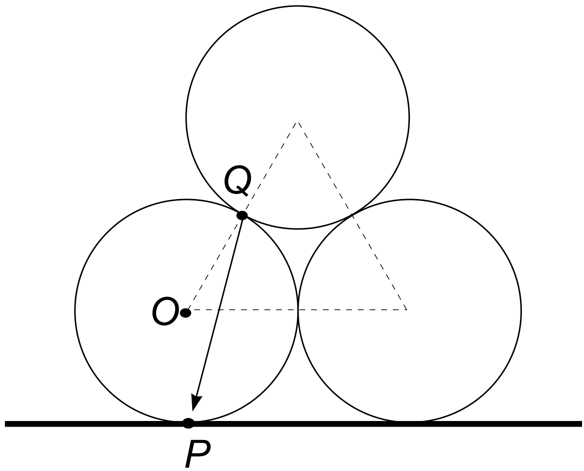
Kvalitatiivselt mõistliku graafikuosa eest [**1 p.**], st graafikuosa algab väärtuselt π rad ja lõpeb väärtuse $\pi/2$ rad juures.

Kokkuvõtvalt on sõltuvus $\alpha(v)$ esitatud järgmisel leheküljel oleval graafikul.



10. (*TORUD*)

Kõigepalt paneme tähele, et põhimõtteliselt võiks antud süsteemis toimida rõhumisjõud kahe alumise silindri vahel, kuid see kaob niipea, kui alumised silindrid natukenegi üksteisest eemalduvad; niisiis võime sellega mitte arvestada. [**1 p.**] (anda ka siis, kui seda põhjendust pole otseselt välja toodud, kuid faktiliselt on oma arvutustes antud jõu puudumisega arvestatud).



Esmalt oletame, et μ on piisavalt suur, nii et vastu põrandat toetuvad torud pigem veerevad kui libisevad (kui k pole piisavalt suur). Vaatleme vastu põrandat toetuvale torule mõjuvate jõumomentide tasakaalu tingimust toru ja põranda kontaktpunkti P suhtes. [**2 p.**] Põranda rõhumis- ja hõõrdeju õlg on null; ka raskusjõud mg õlg on null. Vaadeldavale torule mõjub veel vaid üksainus jõud — ülemise toru põhjustatud hõõrde- ja rõhumisjõu resultant, mis on rakendatud puutepunkti Q (vt joonist) ja kui tegemist on libisemise piirjuhuga (st veidigi väiksem hõõrdetegur k viiks libisemisele), siis moodustab see vektor pinnanormaaliga nurga $\arctan k$ [**1,5 p.**] (sest antud vektor moodustub üksteisega risti olevate rõhumisjõu N ja hõõrdejõu F_h vektorite resultandina ning nurga tangens on $F_h/N = k$). Et ülejäänud jõudude moment oli null, siis peab ka selle jõu moment olema null, st jõu vektor peab olema suunatud punkti P. [**1 p.**] Et kolmnurk OQP on võrdhaarne [**1 p.**] (vt joonist), siis

$$k \geq \tan 15^\circ \approx 0{,}27. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

Nüüd oletame, et $k \geq \tan 15^\circ$ ning vaatleme libisemise piirjuhtu punktis P. Selleks vaatleme jõumomentide tasakaalu punkti Q suhtes. [**2 p.**] Silindrile mõjuv raskusjõud mg ning punktis P toimiv rõhumisjõud $\frac{3}{2}mg$ (mis kompenseerib poolteise silindri raskusjõu) on rakendatud sirge OP sihis ning nende summarne jõumoment $\frac{1}{4}mgR$ [**1,5 p.**] (kus R on silindri raadius) taskaalustab hõõrdejõu momendi $\frac{3}{2}mg\mu(R + \frac{R}{2}\sin 60^\circ)$ [**2 p.**] (siinjuures arvestasime, et punktis P toimiv hõõrdejõud on μ-kordne rõhumisjõud $\frac{3}{2}mg$ ning on horisontaalne ja omab seetõttu õlga $R + \frac{R}{2}\sin 60^\circ$). Seega,

$$\mu \geq \frac{1}{6\left(1 + \frac{\sin 60^\circ}{2}\right)} = \frac{1}{6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)} \approx 0{,}12. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

E1. (*TIKU MASS*)

Esmalt määrame joonlaua massikeskme asukoha. Selleks jagame skaala pooleks või tasakaalustame joonlaua tiku või laua serval ja paneme kirja tiku asukoha näidu joonlaual. [**1 p.**]

Järgmisena määrame tühja tikutopsi massi. Asetame tühja tikutopsi joonlauale võimalikult otsa lähedale ja leiame topsi keskoha asukoha. Viimase saamiseks tuleks võtta topsi mõlema serva näidud ja arvutada aritmeetiline keskmine. [**1 p.**] Tasakaalustame joonlaua ja paneme kirja toetuspunkti asukoha. [**1 p.**] Saadud tulemuste põhjal arvutame joonlaua massikeskme ja tikutopsi massikeskme kaugused toetuspunktist l_1 ja l_2. Kangi seaduse tõttu:

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2 \quad [\mathbf{2\ p.}]$$

ja tühja toosi massiks saame

$$m_2 = \frac{m_1 l_1}{l_2}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

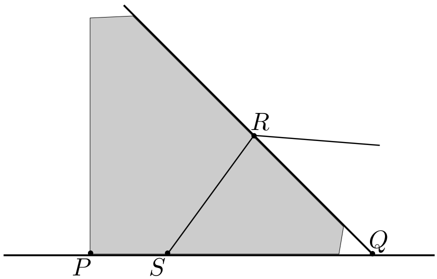
Kordame katset täis tikutopsiga. [**2 p.**] Ühe tiku massi leidmiseks tuleb täis tikutopsi massist lahutada tühja topsi mass ning jagada saadud tulemus topsis olnud tikkude arvuga:

$$m_{\text{tikk}} = \frac{m_{\text{täis}} - m_{\text{tühi}}}{n}. \quad [\mathbf{1\ p.}]$$

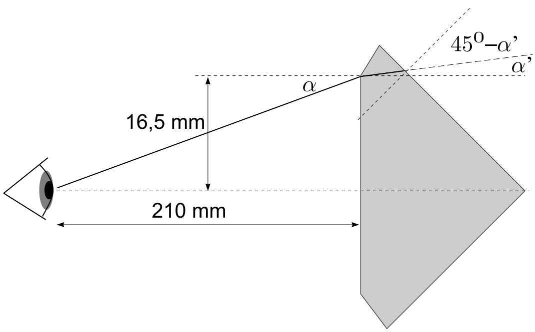
Realistlik vastus ($m_{\text{tikk}} = 0{,}1$ g) [**1 p.**]

E2. (*BRILJANT*)

<u>*Lahendus 1.*</u> Märgime paberil kaks punkti vahekaugusega nt 10 mm. Ühe juurde (P) asetame briljandi tipu, teise (punkti S) katame aga ühe külgtahuga. Asetame joonlaua briljandi suurimale tahule, tihedalt vastu tahku nii, et joonlaua üks ots toetub paberile — punktis Q, briljandi tipust P kaugusel 32 mm/$\sqrt{2}$ = 45 mm, vt joonist. Nüüd liigutame pead üles-alla, otsides üles koha, kus läbi suurima tahu vaadates kaob külgtahuga kaetud punkt sisepeegelduse tõttu. Võtame sellel kadumise hetkel lugemi punkti kujutisega kohakuti olevast joonlaua punktist R, saades teada vahemaa $QR = 26\,\text{mm}$. Sisepeegelduv kiir on seega SR. Et $QS = 35\,\text{mm}$, siis koosinusteoreemist $SR = 24{,}8\,\text{mm}$, st siinusteoreemist $\sin\angle QSR = \sin 45° \cdot \frac{26}{24{,}8}$ ning $n = 1/\cos\angle QSR \approx 1{,}49$.



<u>*Lahendus 2.*</u> Kui vaadata läbi eseme põhjatahu mingit valget pinda nii, et alguses on ese silmale lähedal ja hakata silmast eemale nihutama, on võimalik leida täielikud sisepeegeldused tumedate aladena üheaegselt kõigilt kaheksalt tahult. Sisepeegeldustest moodustatud hulknurk on seda suurem mida kaugemale eseme nihutame ja kaugusel umbes 210 mm silmast täidab ta kogu põhjatahu ala, mille maksimaalne läbimõõt on 33 mm. Kaugemale liikudes on servmised kiired erinevalt lähedasest olekust järjest rohkem risti otsatahu pinnaga ja mingist nurgast alates leiab aset täielik sisepeegeldumine. Et ese on sümmeetriline, teeme joonise kiirte käigu kohta piirjuhul.



Jooniselt näeme, et täieliku sisepeegelduse tekkimise tingimuseks on $1/n = \sin(45^\circ - \alpha') = (\cos\alpha' - \sin\alpha')/\sqrt{2}$. Nüüd võime arvestada, et nurk α' on väike ja seega võime kasutada ligikaudseid avaldisi $\cos\alpha' \approx 1$ ja $\sin\alpha' \approx \alpha'$. Niisiis, $1/n = (1 - \alpha')/\sqrt{2}$. Murdumisseadusest saame asendada $\sin\alpha' = \sin\alpha/n$, st $\alpha' \approx \alpha/n$: $\sqrt{2} = n - \alpha$ ning $n = \sqrt{2} + \alpha \approx \sqrt{2} + \frac{16{,}5}{210} \approx 1{,}49$.

Märkus. Eelpooltoodud ligikaudse arvutuse asemel on võimalik läbi viia ka täpseid trigonomeetrilisi arvutusi, kuid vastus muutub sellest vähem, kui 0,003 võrra.

Lahendus 3. *(Ligikaudne, 9 punkti).* Märgime paberile punkti. Asetame briljandi külgtahuga punkti P peale. Vaatame läbi briljandi aluse (suurima tahu) punktile P. Paneme tähele, et punkt kaob ära siis, kui vaadata alusele üsna täpselt ristisuunas. Punkti P juures oleval tahul toimub täielik sisepeegeldus, läbi aluse läheb valgus murdumiseta. Ülesande tingimustest on nurk aluse ja külgtahu vahel 45 kraadi. Sisepeegelduse piirtingimusest $\sin\alpha = 1/n$, kus $\alpha = 45$ kraadi, leiame $n = 1/\sin\alpha = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Märkus 1. See lahendus läheb läbi ka juhul kui asetada briljant algselt suuremale tahule ja vaadata läbi külgtahu, kuid sel juhul ei ole külgtahu ja vaatesuuna ligikaudse ristiolemise asjaolu nii läbinähtav.

Märkus 2. Seda meetodit on võimalik edasi arendada, tehes lahendusega 2 analoogseid mõõtmisi ja arvutusi. Kui see analüüs on läbi viidud korrektselt, siis on lahendus väärt täispunkte.