Problem T1. Joonised tähelepanu all *(13 points)*

Part A. Ballistika *(4.5 points)*

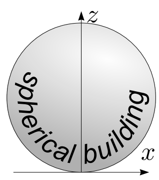
Algkiirusega v_0 visatud palli liikumine homogeenses gravitatsiooniväljas toimub $x-z$-tasandis, kus x-telg on horistonaalne ning z-telg vertikaalne ja vastassuunaline vabalangemise kiirendusega g. Õhuhõõrdumisest tuleneva takistusjõuga mitte arvestada.

i. (0.8 pts) Koordinaatide alguspunktist fikseeritud algkiirusega v_0 välja visatud kivi stardinurka muutes on võimalik tabada sihtmärke ruumipiirkonnas, mis on kirjeldatav võrratusega

$$z \le z_0 - kx^2$$

(seda fakti võite kasutada ilma tõestamata). Leidke konstandid z_0 ja k.

ii. (1.2 pts) Vaadelgem nüüd juhtu, kus stardipunkti asukohta võib maapinnal $z = 0$ vabalt valida ja stardinurka muuta vastavalt soovile. Eesmärgiks on tabada kerakujulise hoone kõige ülemist punkti (kera raadius on R, vt joonist) alustades võimalikult väikese algkiirusega v_0 (enne sihtmärgi tabamist pole pallil lubatud katuse pinnalt põrgata). Skitseerige kvalitatiivselt optimaalne palli trajektoor (kasutage selleks ette nähtud lahtrit vastuste lehel). Pange tähele: punkte antakse ainult skitseeritud joonise eest.



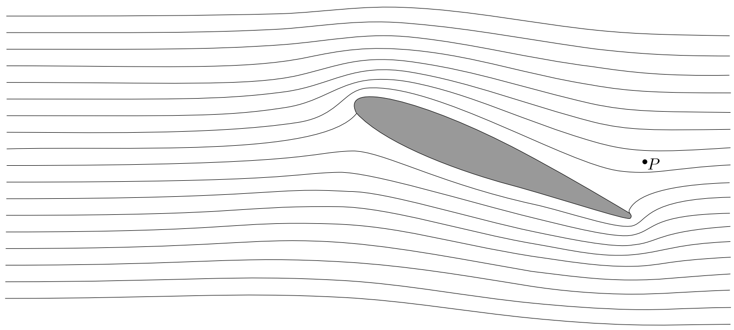
iii. (2.5 pts) Mis on minimaalne vajalik stardikiirus $v_{\min}$, et tabada kerakujulise hoone kõige ülemist punkti (kera raadius on R)?

La Géode, Parc de la Villette, Paris. Photo: katchooo/flickr.com

Part B. Õhuvool tiiva ümber *(4 points)*

Ülesande selle osa jaoks võib kasuks tulla järgmine informatsioon. Vedeliku või gaasi voolu korral kehtib mööda voolujoont seos $p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$, eeldusel et kiirus v on palju väiksem kui heli kiirus. Siin kasutasime tähistusi ρ — tihedus, h — kõrgus, g — raskuskiirendus, p — hüdrostaatiline rõhk. Voolujooned on defineeritud kui gaasiosakeste trajektoorid (eeldusel et need on ajas muutumatud). Avaldist $\frac{1}{2}\rho v^2$ nimetatakse dünaamiliseks rõhuks.

Alltoodud joonisel on kujutatud lennukitiiva läbilõige koos ümbritseva õhu liikumise voolujoontega, vaadatuna tiiva taustsüsteemis. Eeldage, et (a) õhuvool on täiesti kahedimensionaalne (s.t. õhu kiirusvektorid on tervenisti joonise tasandis); (b) voolujoonte kuju ei sõltu lennuki kiirusest; (c) ei ole tuult; (d) dünaamiline rõhk on palju väiksem kui atmosfäärirõhk $p_0 = 1.0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Võite joonlaua abil teha vastustelehe jooniselt vajalikke mõõtmisi.



i. (0.8 pts) Kui lennuki kiirus maa suhtes on $v_0 = 100\,\mathrm{m/s}$, siis mis on õhu kiirus v_P maapinna suhtes punktis P (märgitud joonisel)?

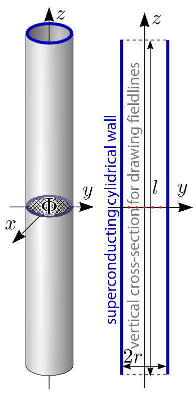
ii. (1.2 pts) Kõrge suhtelise õhuniiskuse puhul, kui lennuki kiirus maa suhtes ületab kriitilise väärtuse v_{crit}, tekib tiiva taga veepiiskade juga. Piisad tekivad teatud punktis Q. Tähistage punkt Q vastustelehe joonisel. Seletage kvalitatiivselt (kasutades valemeid ja võimalikult vähe teksti), kuidas te selle punkti asukoha leidsite.

iii. (2.0 pts) Hinnake kriitilist kiirust v_{crit} järgmiseid andmeid kasutades: algse häirimata õhu suhteline õhuniiskus $r = 90\%$, õhu erisoojus konstantsel rõhul $c_p = 1.00 \times 10^3\,\mathrm{J/kg \cdot K}$, küllastunud veeauru rõhk: $p_{sa} = 2.31\,\mathrm{kPa}$ algse häirimata õhu temperatuuril $T_a = 293\,\mathrm{K}$ ja $p_{sb} = 2.46\,\mathrm{kPa}$ temperatuuril $T_b = 294\,\mathrm{K}$. Sõltuvalt kasutatud lähendustest võib lisaks vaja minna õhu erisoojust konstantsel ruumalal $c_V = 0.717 \times 10^3\,\mathrm{J/kg \cdot K}$.

Suhteline õhuniiskus on defineeritud aururõhu ja küllastunud auru rõhu suhtena. Küllastunud auru rõhk on defineeritud kui aururõhk, mille puhul aur on tasakaalus vedelikuga.

Part C. Magnetkõrred *(4.5 points)*

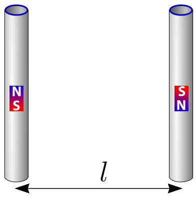
Vaatleme ülijuhtivast materjalist valmistatud toru. Toru pikkus on l ja sisemine raadius on r, kusjuures $l \gg r$. Toru keskpunkt paikneb koordinaatide alguspunktis ning selle telg langeb kokku z-teljega. Toru keskel läbib selle ristlõiget ($z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$) magnetvoog Φ. Ülijuht on selline materjal, mis tõrjub endast välja igasuguse magnetvälja (ülijuhi sees on magnetvälja suurus null).



i. (0.8 pts) Skitseerige vastustelehe vastavasse kasti viis sellist magnetvälja jõujoont, mis läbivad toru teljesuunalisele ristlõikele märgitud viit punast täppi.

ii. (1.2 pts) Leidke toru keskel z-telje suunaline pinge T (s.t. jõud, millega toru kaks poolt, $z > 0$ ja $z < 0$, üksteist mõjutavad).

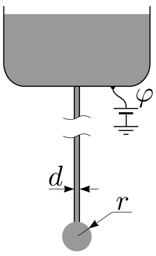
iii. (2.5 pts) Nüüd on meil teine toru, esimesega identne ja paralleelne. Teises torus on esimesega vastassuunaline magnetväli ja selle keskpunkti koordinaadid on $y = l$, $x = z = 0$ (seega torud paiknevad mõttelise ruudu vastaskülgedel). Leidke magnetilisest vastastikmõjust tulenev jõud F kahe toru vahel.



Problem T2. Kelvini veetilgutaja *(8 points)*

Järgnevad pindpinevuse kohta käivad faktid võivad osutuda selle ülesande lahendamisel kasulikuks. Vee molekulide jaoks on vedeliku ja õhu eralduspinnal paiknemine ebasoodsam kui paiknemine vedeliku sisemuses. Seetõttu omistatatakse eralduspinnale pinnaenergia $U = \sigma S$, kus S on eralduspinna pindala ja σ on vedeliku pindpinevustegur. Seetõttu tõmbavad ka kaks vedeliku pinna osa teineteist jõuga $F = \sigma l$, kus l on nende pinna osade eraldusjoone pikkus.

Pikk metallist toru sisediameetriga d on suunatud otse alla. Vesi tilgub aeglaselt toru alumisest otsast, vt joonist. Vee võib lugeda elektrijuhiks. Vee pindpinevustegur on σ ning tihedus ρ. Eeldage igal pool, et $d \ll r$. Suurus r tähistab toru otsast alla rippuva veetilga raadiust, mis kasvab ajas aeglaselt kuni tilga eraldumiseni toru otsast raskuskiirenduse g tõttu.



Part A. Üksik toru *(4 points)*

i. (1.2 pts) Leidke veetilga raadius $r_{\max}$ vahetult enne toru otsast eraldumist.

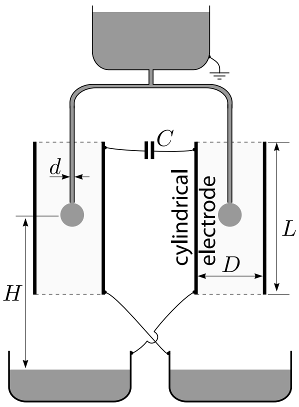
ii. (1.2 pts) Toru elektrostaatiline potentsiaal lõpmatult kaugel asuvate punktide suhtes on φ. Leidke veetilga laeng Q, kui tilga raadius on r.

iii. (1.6 pts) Selles alaküsimuses eeldagem, et raadiust r hoitakse konstantsena, kuid φ kasvab aeglaselt. Kui hüdrostaatiline rõhk veetilga sees saab väiksemaks atmosfääri rõhust, muutub tilk ebastaabiilseks ning laguneb kaheks väiksemaks tilgaks. Leidke kriitiline potentsiaal $\varphi_{\max}$, mille juures see juhtub.

Part B. Kaks toru *(4 points)*

Seade nimega "Kelvini veetilgutaja" koosneb kahest torust (identsed osas A (Part A) kirjeldatud toruga), mis on omavahel T-kujulisega toruühendusega ühendatud, vt joonist. Torude otsad paiknevad üks ühe, teine teise silindrilise elektroodi keskel (silindrite kõrgused on L, diameetrid D, $L \gg D \gg r$). Kummagi toru otsast toimub tilkumine sagedusega n tilka ajaühikus. Tilgad langevad kõrguselt H nende all asuvatesse elektrit juhtivast materjalist anumatesse, mis on risti ühendatud elektroodidega nagu joonisel näidatud. Elektroodid on omavahel ühendatud läbi kondensaatori mahtuvusega C. Elektroodidest ja anumatest koosneva süsteemi kogulaeng on null. Pange tähele, et ülemine veekonteiner on maandatud.

Esimene langev veetilk omab mikroskoopilist laengut, mis viib kaks poolt tasakaalust välja ja kondensaatorile tekib väike laeng.



i. (1.2 pts) Avaldage $r_{\max}$ (osast A-i) abil toru otsast eralduvate tilkade laengu Q_0 absoluutväärtus, kui kondensaatoril on laeng q. Osas A-iii kirjeldatud efektiga mitte arvestada.

ii. (1.5 pts) Leidke kondensaatori laengu q sõltuvus ajast t, lähendades seda pidevale funktsioonile $q(t)$ ning eeldades, et $q(0) = q_0$.

iii. (1.3 pts) Tilgutaja töötamist võib takistada osas A-iii kirjeldatud efekt. Täiendavalt seab saavutatavale elektroodide vahelisele pingele piiri $U_{\max}$ tilga ja selle all asuva anuma vaheline elektrostaatiline tõukejõud. Leidke $U_{\max}$.

Problem T3. Prototähe tekkimine *(9 points)*

Modelleerime tähe tekkimist tähtedevahelises ruumis (kaugel eemal teistest tähtedest) järgneval viisil. Hõre sfääriline gaasipilv, mis on algselt paigal, hakkab omaenda gravitatsiooni mõjul kokku tõmbuma. Kera algne raadius on r_0 ja mass m. Ümbruskonnas (mis on gaasipilvest palju hõredam) ja algselt ka igal pool gaasipilves on temperatuur T_0. Võite eeldada, et gaas on ideaalne. Gaasi keskmine molaarmass on μ ja selle adiabaaditegur on $\gamma > \frac{4}{3}$. Võite eeldada, et $G\frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, kus R on gaasikonstant ja G gravitatatsioonikonstant.

i. (0.8 pts) Suure osa kokkutõmbumise ajast on gaas nii läbipaistev, et kogu tekkinud soojus kiiratakse koheselt ära, s.t. kera on ümbruskonnaga soojuslikus tasakaalus. Mitu korda (n) suureneb rõhk, kui raadius väheneb kaks korda ($r_1 = 0.5r_0$)? Eeldage, et gaasi tihedus on igal pool sama.

ii. (1 pt) Hinnake aega t_2, mis kulub raadiuse kahanemiseks r_0 -lt $r_2 = 0.95r_0$ -ni. Jätke arvestamata langeva gaasiosakese asukohas oleva gravitatsioonivälja muutumine.

iii. (2.5 pts) Eeldades, et rõhk jääb tühiselt väikeseks, hinnake aega $t_{r\to 0}$, mis kulub kera kokkutõmbumiseks r_0 -lt palju väiksema raadiuseni, kasutades Kepleri seadusi elliptiliste orbiitide kohta.

iv. (1.7 pts) Raadiusel $r_3 \ll r_0$ muutub gaas piisavalt tihedaks, et olla soojuskiirgusele läbipaistmatu. Arvutage soojushulk Q, mis kiiratakse ära kokkutõmbumisel raadiuselt r_0 raadiuseni r_3.

v. (1 pt) Väiksemate raadiuste jaoks kui r_3 võite eeldada, et kerast kiirguv soojus on tühiselt väike. Leidke, kuidas sõltub kera temperatuur T selle raadiusest $r < r_3$.

vi. (2 pts) Lõpuks ei ole võimalik eirata rõhu mõju gaasi dünaamikale ning kokkutõmbumine peatub raadiusel $r = r_4$ (kus $r_4 \ll r_3$). Siiski, soojuskiirguse mõju võib endiselt lugeda tühiselt väikeseks ning temperatuur ei ole veel piisavalt kõrge, et tuumasüntees (fusioon) saaks alata. Sellises prototähes ei ole rõhk enam igal pool sama, kuid sellegipoolest on võimalik anda ligikaudseid hinnanguid ilma täpsete arvuliste kordajateta. *Hinnake* lõppraadiust r_4 ja vastavat temperatuuri T_4.