Eesti koolinoorte 27. füüsika lahtine võistlus

26. november 2016. a. Vanema rühma ülesannete lahendused

1. (*MÄNGUKAHUR*) (*8 p.*) *Autor: EFO žürii.* Kuna pall maandub kaldpinnale risti, siis liigub pall sellel hetkel nurga α all vertikaali suhtes. Seega tulistatakse pall kahurist välja ka nurga α all vertikaali suhtes ning pall põrkab kaldpinnalt tagasi ka sama nurga all. Palli horisontaalne kiiruse komponent on $v\sin(\alpha)$ ja vertikaalne komponent on $v\cos(\alpha)$. Trajektoori kõige ülemises punktis on vertikaalne kiiruse komponent null ja on kulunud pool kogu liikumise ajast t. Aja $t/2$ jooksul muutub kiirus raskuskiirenduse tõttu $gt/2$ võrra, seega $gt/2 = v\cos(\alpha)$, millest $t = 2v\cos(\alpha)/g$. Horisontaalne kiirus ei muutu liikumise jooksul. Horisontaalselt läbitud vahemaa on

$$s = vt\sin(\alpha) = \frac{2v^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g} = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{g}.$$

Seega kahurist tulistades oli palli algkiirus v_1, kus

$$v_1^2 = \frac{Lg}{\sin(2\alpha)},$$

ning tagasipõrkel v_2, kus

$$v_2^2 = \frac{lg}{\sin(2\alpha)}.$$

Tulistamise ja tagasipõrkamise hetkel oli pallil ainult kineetiline energia:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mLg}{2\sin(2\alpha)}, \qquad E_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mlg}{2\sin(2\alpha)}.$$

Seega põrkel kaduma läinud energia osakaal on

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{L - l}{L}.$$

2. (*KURV*) (*8 p.*) *Autor: Mihkel Rähn.* Olgu autole mõjuv summaarne jõud N. Kuna autos olijad ei tunne külgsuunalist jõudu, on N teega risti ja seega nurga α all vertikaali suhtes. Jõu võrrandid maaga seotud teljestikus on:

$$\text{I:}\quad mg = N\cos\alpha$$

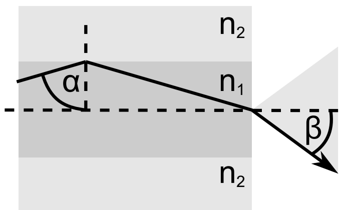
$$\text{II:}\quad N\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}$$

Lahendades võrrandisüsteemi saame $\alpha = \arctan(\frac{v^2}{Rg}) = 14$ kraadi.

3. (*ELEKTRISKEEM*) (*8 p.*) *Autor: Kristian Kuppart.* Vahetult pärast lüliti sulgemist ei ole parempoolsele kondensaatorile laengut jõudnud koguneda, mis tähendab, et pinge tema klemmidel $U = \frac{q}{C} = 0$. Parempoolsest ülemisest takistist esimesel hetkel voolu läbi ei lähe. Sama mõttekäik kehtib vasakpoolse kondensaator kohta, niisiis voolutugevus $I = \frac{2U}{R}$

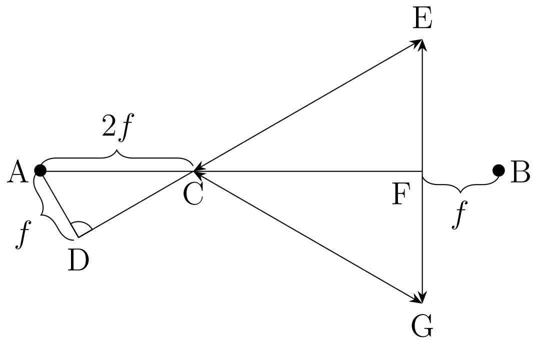
Pika aja möödumisel on mõlemad kondensaatorid efektiivselt lahti ühendatud, kogu vool läheb läbi keskmise haru: $I = \frac{U}{2R}$

4. (*OPTILINE KIUD*) (*8 p.*) *Autor: Andreas Valdmann.*



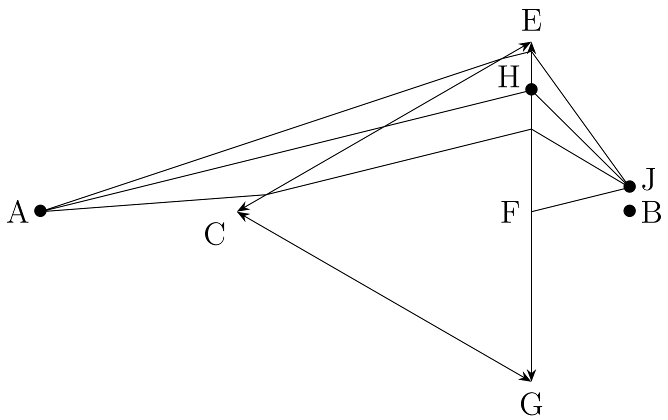
Pikas optilises kius jäävad levima vaid sellised kiired, mille jaoks toimub südamiku ja katte lahutuspinnal täielik sisepeegeldumine. Kui valgus langeb lahutuspinnale täieliku sisepeegeldumise piirnurgast väiksema nurga all, siis toimub korraga nii peegeldumine kui murdumine. Pärast mitmeid peegeldusi väheneb nende kiirte intensiivsus praktiliselt nullini, sest peaaegu kogu valgus on kiu külgedelt välja murdunud. Täieliku sisepeegeldumise piirnurk $\alpha = \arcsin(n_2/n_1) = 80{,}5°$. Piirnurgale vastavad kiired levivad kiu telje suhtes nurga $90° - \alpha$ all. Pärast kiu otsast väljamurdumist on nende kiirte nurk kiu telje suhtes $\beta = \arcsin[n_1 \sin(90° - \alpha)] = \arcsin[n_1 \cos(\alpha)]$. Valguskoonuse tipunurk θ on sellest kaks korda suurem: $\theta = 2\beta = 2\arcsin[n_1\cos(\alpha)] = 28°$. Kuna $\cos(\arcsin(a)) = \sqrt{1-a^2}$, siis on võimalik vastus esitada kujul $\theta = 2\arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2})$.

5. (*KOLMLÄÄTS*) (*8 p.*) *Autor: Andres Põldaru.* Kõigil kolmel läätsel on sama fookuskaugus, sest neil on üks ühine fookuspunkt, milleks on kolmnurga keskpunkt. Kolmnurgad $\triangle ACD$ ja $\triangle CEF$ on sarnased, sest nad on täisnurksed kolmnurgad, mille ühise tipu C juures olevad nurgad on samad. Seega $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EC|}$, millest $|AD| = \frac{|AC|}{2} = f$.



Saame järeldada, et punkt A asub mõlema läätse CE ja CG fokaaltasandites. Kui läätsele langevad paralleelsed kiired, siis need koonduvad fokaaltasandis ühte punkti ja seega teistpidi mõeldes peavad fokaaltasandi ühest punktist pärinevad kiired olema paralleelsed peale läätse läbimist. Nende paralleelsete kiirte nurka on võimalik määrata nii, et tõmbame punktist A ühe kiire läbi läätse CE või CG keskpunkti. Läätse keskpunkti läbiv kiir ei murdu ja liigub samas suunas edasi. Alumisel joonisel läbib kiir AH läätse keskpunkti ja teised kiired on konstrueeritud selliselt, et peale läätse läbimist on nad sellega pralleelsed.

Peale esimese läätse läbimist, läätsele EG langevad paralleelsed kiired koonduvad fokaaltasandi ühte punkti J. Selle punkti leidmiseks joonistame läätse EG keskpunkti F läbiva kiire, mis on kiirega AH paralleelne, ja leiame selle kiire lõikumispunkti J fokaaltasandiga. Jooniselt on näha, et ükski kiir punkti B ei jõua, sest nad kõik kõik koonduvad punkti J ja vertikaalseid kiiri ei ole. Läätse CG jaoks on konstruktsioon sama, ainult peegelpildis AB suhtes ja seega ka sealt ei jõua valgus punkti B.



Alternatiivne lahendus

Analoogselt võime vaadata hoopis seda, kui punktis B on valgusallikas. Kui punktist A pärinevad kiired jõuavad punkti B, siis peavad ka punktist B pärinevad kiired jõudma punkti A. Punkt B on läätse EG fokaaltasandis ja tekitab paralleelse kiirtekimbu. Edasi sarnaselt eelmise lahendusega see kiirtekimp koondub peale teise läätse läbimist selle läätse fokaaltasandi ühte punkti, mis ei ole A. Fokaaltasand on läätsega paralleelne ja kui kiired koonduvad selles tasandis mingisse punktist A erinevasse punkti, siis järelikult punkti A valgus ei jõua.

6. (*RATTUR*) (*10 p.*) *Autor: Ardi Loot.* Ratturile mõjuvad laskumisel kolm jõudu: mäest allaviiv raskusjõud ($F_a = mg\sin(\theta)$) ning takistavad hõõrdejõud ($F_h\cos(\theta)$, väikese nurga tõttu võib $\cos(\theta)$ ära jätta) ja tuuletakistus ($F_t = cv^2$, kus c on kordaja). Rattur on saavutanud lõppkiiruse, kui need jõud on tasakaalustunud. Kuna lõppkiirus on teada kahe eri langemisnurga korral, on võimalik kirja panna võrrandisüsteem hõõrdejõu F_h ja tuuletakistuskordaja c leidmiseks ($v_2 = v_1 - \Delta v$)

$$\begin{cases} mg\sin(\theta_1) = F_h\cos(\theta_1) + cv_1^2 \\ mg\sin(\theta_2) = F_h\cos(\theta_2) + cv_2^2 \end{cases}.$$

Lahendades süsteemi saab avaldada:

$$\begin{aligned} F_h &= mg \cdot \frac{v_1^2 \sin(\theta_2) - v_2^2 \sin(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 1{,}7\,\mathrm{N} \\ c &= mg \cdot \frac{\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 0{,}42\,\mathrm{kg/m}. \end{aligned}$$

Kasutades saadud tulemusi on lihtne arvutada ratturile mõjuvad takistusjõud ja sellele ületamiseks kuluv võimsus horisontaalsel teel kiirusega v:

$$F = F_h + cv^2 \approx 14{,}5\,\mathrm{N}$$

$$P = Fv = mgv \cdot \frac{\sin(\theta_1)\left(v^2\cos(\theta_2) - v_2^2\right) - \sin(\theta_2)\left(v^2\cos(\theta_1) - v_1^2\right)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)}$$

$$P \approx 80{,}8\,\mathrm{W}.$$

Tuuletakistuse ületamiseks kulub $cv^2/F = 88{,}5\,\%$ koguvõimsusest.

7. (*PAISUPAAK*) (*10 p.*) *Autor: Ardi Loot.* Juhul kui paisupaak pole veel küttesüsteemiga ühendatud, on terve paisupaak täidetud õhuga. Seega saab kirja panna ideaalse gaasi olekuvõrrandi

$$p_0 V = nRT_0, \tag{1}$$

kus n on paagis oleva õhu moolide arv ja R universaalne gaasikonstant. Teisalt on nõutud, et juhul kui süsteem täidetakse rõhuni p_1 peab olema paisupaagist osa β täidetud veega, seega osa $\gamma = 100\,\% - \beta$ on täidetud õhuga. Kuna vahesein on vabalt liikuv, siis peavad silindris asuva vee ja õhu rõhud olema võrdsed. Seega saab kirja panna teise olekuvõrrandi

$$p_1 \gamma V = nRT_0. \tag{2}$$

Lahendades võrranditest (1), (2) tekkinud süsteemi saame

$$p_0 = \gamma p_1 = 270\,\mathrm{kPa}.$$

Paisupaagi minimaalse ruumala V leiame tingimusest, et $\Delta p \leq 50\,\mathrm{kPa}$. On selge, et kui vee ruumala suureneb $\Delta V = \alpha V_s = 1\,\mathrm{L}$ võrra, siis paagis oleva õhu ruumala väheneb sama palju. Seega saame kirja panna

$$p_2 \left(\gamma V - \Delta V\right) = nRT_2. \tag{3}$$

Lahendades võrranditest (1), (3) tekkinud süsteemi saame

$$p_2 = p_0 \frac{V}{\gamma V - \Delta V} \cdot \frac{T_2}{T_0}$$

ning tingimus paisupaagi ruumala jaoks avaldub seega

$$V \geq \frac{\left(p_1 + \Delta p\right) T_0}{\left(p_1 + \Delta p\right) T_0 - p_1 T_2} \cdot \frac{\Delta V}{\gamma} \approx 13{,}2\,\mathrm{L}.$$

8. (*OKTAEEDER*) (*10 p.*) *Autor: Jaan Kalda.* Et ampermeetrite sisetakistus on 0 siis võime need lühistada: kõigis nendes tippudes kuhu viivad ampermeetrid on potentsiaalid võrdsed. Sümmeetria tõttu peab see potentsiaal jääma täpselt patareiklemmide potentsiaalide vahepeale, seega on igale takistile rakendatud pinge 3 V. Niisiis on 1-oomistes takistites vool 3 A ja 2-oomistes 1,5 A. Sümmeetria tõttu jaguneb see voolude vahe igas tipus võrdselt kahe naaber-ampermeetri vahel, st kõikide ampermeetrite näidud on 0,75 A.

9. (*ANEMOMEETER*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.* Leviaegade suhtelised erinevused on väikesed, seega võime lugeda, et helikiirus on hulga suurem tuule kiirusest. Vaatleme heli levikut õhuga seotud taustsüsteemis, kus sensorite suhtelise nihke x- ja y-telje sihilised komponendid ($s_x = u_x \frac{a}{c_s}$ ja $s_y = u_y \frac{a}{c_s}$) on samuti väikesed, $s_x, s_y \ll a$; u_x ja u_y tähistavad tuule kiiruse komponente ning c_s - heli kiirust. Rangelt võttes pidanuksid siin valemeis olema täpsed lennuajad t_A, t_B ja t_C, kuid nihked ise on väikesed ning leviaegade väikeste vahede tõttu tuleb viga juba tühiselt väike. Niisiis saame leviaegade jaoks avaldised:

$$t_A = \frac{1}{c_s}\left(a + u_y\frac{a}{c_s}\right),$$
$$t_B = \frac{1}{c_s}\left(a + u_x\frac{a}{c_s}\right) \quad \text{ja}$$
$$t_C = \frac{1}{c_s}\left(a - u_x\frac{a}{c_s}\right),$$

millest $\frac{a}{c_s} = \frac{1}{2}(t_B + t_C)$,

$$u_x = \frac{c_s^2}{a}\left[t_B - \frac{1}{2}(t_B + t_C)\right] = c_s\frac{t_B - t_C}{t_B + t_C} = 2a\frac{t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 6{,}1\,\mathrm{m/s}$$

ning

$$u_y = \frac{c_s^2}{a}\left[t_A - \frac{1}{2}(t_B + t_C)\right] = 2a\frac{2t_A - t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 7{,}1\,\mathrm{m/s}.$$

Seega on tuule kiirus $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \approx 9{,}4\,\mathrm{m/s}$.

10. (*KUULID*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.* Metallkeradele indutseeritakse elektrivälja poolt võrdsed ja vastasmärgilised laengud $\pm q$; kuivõrd traat on peenike, siis võime ignoreerida sellel olevaid laenguid. Et traat on juhtivast materjalist, siis on süsteem ekvipotentsiaalne, ning võrdne süsteemi sümmmeetriatasandis lõpmatuses paiknevate punktide potentsiaaliga:

$$E\frac{l}{2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \Rightarrow \quad q = 2lE\pi\varepsilon_0 R.$$

Seetõttu mõjub kummalegi kuulile elektrostaatiline jõud qE, mille tasakaalustab niidi pinge:

$$T = 2lE^2\pi\varepsilon_0 R.$$