Eesti koolinoorte 29. füüsika lahtine võistlus

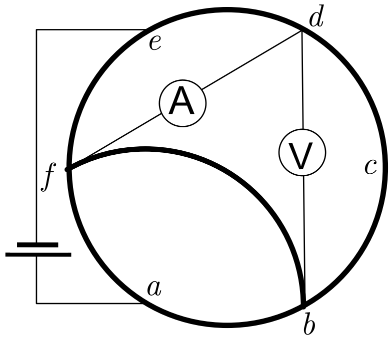
24. november 2018. a. Vanema rühma ülesannete lahendused

Žürii vea tõttu sattus venekeelsesse komplekti ülesande "Kahurid" Noorema rühma variant. Žürii vabandab! Erinevusi võetakse hindamisel arvesse.

1. (*KÄRBES*) Minimaalne kaugus on siis, kui kärbes läbib optilist peatelge. Kärbes ja tema kujutis on sel hetkel läätsest kahekordse fookuskauguse kaugusel. Kuna nii kärbes kui ka tema kujutis on läätsest sama kaugel, on kujutise suurendus 1, mistõttu kujutise liikumiskiirus on sama, mis kärbse liikumiskiirus, ehk $u = v = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$. (*6 p.*)
Autor: Erkki Tempel.

2. (*2018*) Selleks, et kogutakistus oleks $2018\,\Omega$, peaks kaks R_3 takistit ülejäänud takistitega jadamisi olema. Pannes need rööbiti muutuks takistus liiga väikseks. Seega taandub ülesanne $18\,\Omega \pm 0{,}2\,\Omega$ leidmisele nelja takistiga. Üks sobilikest lahenditest on näiteks kahe R_1 ja kahe R_2 rööbiti paigutamine. Sellisel juhul on takistus $2R_3 + \frac{1}{\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}} = 2018{,}182\,\Omega$ (*6 p.*) *Autor: Erkki Tempel.*

3. (*RING*) Teeme ekvivalentskeemi, vt joonis, kus ideaalse ampermeetri asendame traadiga ning ideaalse voltmeetri kõrvaldame. Et voltmeeter on kinnitatud punktide b ja d vahele, siis peame leidma pinge takistil $2R$. Kirhoffi vooluseaduse tõttu näitab ampermeeter ülemise vasakpoolse takisti R ning ülemise takisti $2R$ voolude vahet. Takistus d ja a vahel on takistite R ja $2R$ rööpühendus, st $\frac{2}{3}R$ ning d ja e vahel — $\frac{1}{2}R$; seega kogutakistus on $\frac{7}{6}R$. Voolutugevus läbi patarei on $I_0 = \frac{6}{7}\frac{\mathcal{E}}{R}$ ning see jaguneb punkte d ja a ühendava ülemise ja alumise haru vahel takistuste suhte vahekorras 1:2, st ülemisse harru läheb vool $I = \frac{1}{3}I_0 = \frac{2}{7}\frac{\mathcal{E}}{R}$. Pinge d ja b vahel saame Ohmi seadusest, $U = IR = \frac{2}{7}\mathcal{E} = 2\,\mathrm{V}$. Läbi



ülemise vasakpoolse takisti läheb pool koguvoolust, $I_1 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{7}\mathcal{E}$ ja takistit $2R$ läbib vool $I_2 = \frac{U}{2R} = \frac{1}{7}\mathcal{E}$. Seega ampermeeter näitab voolu $I_A = I_2 - I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{7R} = 2\,\mathrm{A}$. *(8 p.) Autor: Jaan Kalda.*

4. (*KAHURID*)
Kahurist A tulistatud kuul jõuab haripunkti siis, kui selle vertikaalne kiiruse komponent on 0, ehk ajahetkel $t_0 = \frac{v_A \sin\alpha}{g} = 7\,\mathrm{s}$. Kahurikuulid põrkuvad seega kokku momendil $t_0 + t_1 = 12\,\mathrm{s}$. Sellel hetkel on kahurist A lastud kuuli ja kahuri B horisontaalne vahekaugus $v_A \cos\alpha(t_0 + t_1) - l = v_{Bx}t_1$, kus v_B on kahurist B tulistatud kuuli algkiirus. Niisiis, $v_{Bx} = \frac{v_A \cos\alpha(t_0+t_1)-l}{t_1} = -91{,}0\,\mathrm{m/s}$.

Selleks, et kuulid vertikaaltasandis ajehetkel t_0+t_1 kokku saaksid, peab kehtima

$$v_A \sin\alpha(t_0 + t_1) - \frac{g(t_0 + t_1)^2}{2} = v_y t - \frac{gt_1^2}{2},$$

ehk

$$v_{B_y} = v_A \sin\alpha\left(\frac{t_0}{t_1} + 1\right) - \frac{g(t_0 + t_1)^2}{2t_1} + \frac{gt_1}{2} = 49\,\mathrm{m/s}.$$

Niisiis,

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 103\,\mathrm{m/s}.$$

(8 p.) Autor: Erkki Tempel.

5. (*HIIGLANE*) Võrdleme mõlema hüppaja poolt tehtud tööd. Läbides väikese vahemaa Δl teevad lihased töö

$$\Delta A = F\Delta l.$$

Jõud sõltub hüppaja kõrgusest h ruutsõltuvuse järgi, sest lihaste pindala kasvab lineaarmõõtme ruuduga. Lisaks kasvab läbitud vahemaa võrdeliselt lineaarmõõtmega. Seega lihaste poolt tehtud töö on võrdeline hüppaja pikkuse kuubiga $A \propto h^3$.

Vaatleme nüüd, kui palju potentsiaalne energia muutub. Algselt seisab hüppaja vabalt, seejärel laskub alla vahemaa h_1 võrra ja hüppab üles. Kui hüppe kõrgus on h_2, siis potentsiaalsete energiate vahemaa hüppe madalaimas ja kõrgeimas punktis on $mg(h_1+h_2)$. Kuna alg- ja lõpphetkel on hüppaja paigal (kineetiline energia puudub), siis energia jäävuse seaduse järgi peab tehtud töö võrduma potentsiaalse energia muuduga:

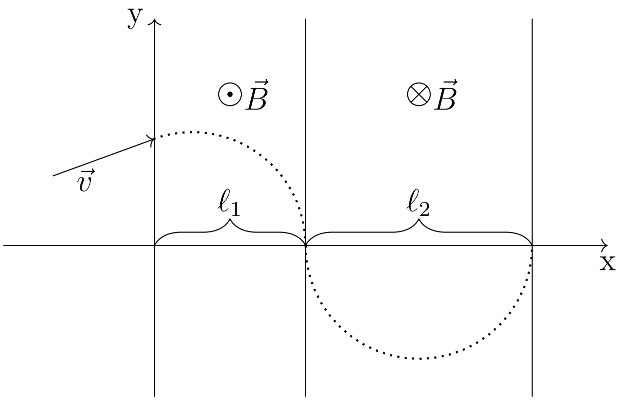
$$A = mg(h_1 + h_2) \quad \rightarrow \quad h_2 = \frac{A}{mg} - h_1.$$

Kuna nii mass kui tehtud töö A sõltuvad lineaarmõõtme kuubist, siis jagatis A/m on mõlema hüppaja jaoks sama. Kuna laskumise vahemaa h_1 on võrdeline hüppaja pikkusega, siis tuleb välja, et hüppe kõrgus on suuremal vennal hoopis väiksem. (*10 p.*) *Autor: Andres Põldaru.*

6. (*MAGNETVÄLJAD*) Magnetväljas tugevusega B liigub prooton kiirusega v ringjoonelisel trajektooril raadiusega R. Tsentripetaaljõu ja magnetjõu võrdusest saab avaldada R:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \implies R = \frac{mv}{qB}.$$

Prootoni trajektoor vahemikus $\ell_1 \leq x < \ell_1 + \ell_2$ on ringjoon (täpsemalt ringjoone kaar), mis lõikub sirgega $x = \ell_1$. Et prooton saaks jõuda tasandi parempoolsesse osasse $x \geq \ell_1 + \ell_2$, peab selle trajektoor lõikuma ka sirgega $x = \ell_1 + \ell_2$. Seega peab selle trajektoorile vastav ringjoon lõikuma kahe paralleelse sirgega, mille vahekaugus on ℓ_2. Siit $2R \geq \ell_2$ ehk $2\frac{mv}{qB} \geq \ell_2$, millest $v \geq \frac{qB\ell_2}{2m}$. Kui prooton siseneb teise vahemikku liikudes vertikaalsihis alla kiirusega $v = \frac{qB\ell_2}{2m}$, siis selle trajektoor on poolkaar, millel liikudes see jõuab täpselt vahemikust läbi. Kuna $\ell_1 < \ell_2$, siis leidub selline prootoni sisenemisnurk esimesse vahemikku, mille puhul prooton jõuab teise vahemikku. Kui keerata sellest sisenemisnurgast alustades prootoni kiirusvektorit päripäeva, siis vertikaalse vektorini jõudes selle trajektoor enam sirget $x = \ell_1$ ei lõika. Seega mingil hetkel puutub selle trajektoorile vastav ringjoon sirget $x = \ell_1$. Selle sisenemisnurga puhul läbib prooton esimese vahemiku ja siseneb teise vahemikku vertikaalselt alla mineva kiirusega, seega see läbib mõlemad vahemikud. Seega on kiiruse $v = \frac{qB\ell_2}{2m}$ puhul prootonil võimalik tasandi vasakpoolsest osast tasandi parempoolsesse osadesse saada. Näitasime juba, et väiksemad kiirused ei tööta, seega minimaalne läbimiskiirus on $v = \frac{qB\ell_2}{2m}$. (*8 p.*) *Autor: Kaarel Hänni.*



7. (*KAUSS VEEGA*) Käsitleme esmalt jõudu mida põhjustab veesamba impulsi muut kausile, jättes kõrvale veesamba massi mis langeb kaussi peale valamise lõppemist. Veesammas mõjub kausi põhjale jõuga $F = \frac{dp}{dt}$. Olgu vee kiirus vahetult enne põhja vastu põrkumist v. Võime teha lihtsustuse, et kausi põhja vastu põrkudes jääb vesi seisma. Seega,

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|v|.$$

Järgmiseks leiame vee kiiruse vahetult enne kaussi jõudmist. Valamise algushetkel on vee kiirus $v_0 \approx 0$. Langedes rakendab veesambale jõudu ainult gravitatsioon. Seega rakendame valemit $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$, millest avaldub, et $v = \sqrt{2hg}$ Järelikult $F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|v| = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\sqrt{2gh}$ Vee valamine lõpetati hetkel, kui $m_{\text{kausis}}g + F = m_{\text{skaalal}}g$, millest avaldub, et vee mass valamise hetkel kausis oli:

$$m_{\text{kausis}} = \frac{m_{\text{skaalal}}g - F}{g} = m_{\text{skaalal}} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Käsitleme nüüd veesamba massi, mis lisandub kaussi peale valamise lõppemist. Veesamba mass on $m_{\text{veesammas}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t$, kus Δt on aeg mil kulub veesamba ühe elementaarelemendi jõudmiseks kaussi. Rakendame valemit$v = v_0 + at$ ja leiame, et:

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Millest järeldub, et valamise lõppedes on kaussi jõudva veesamba mass on

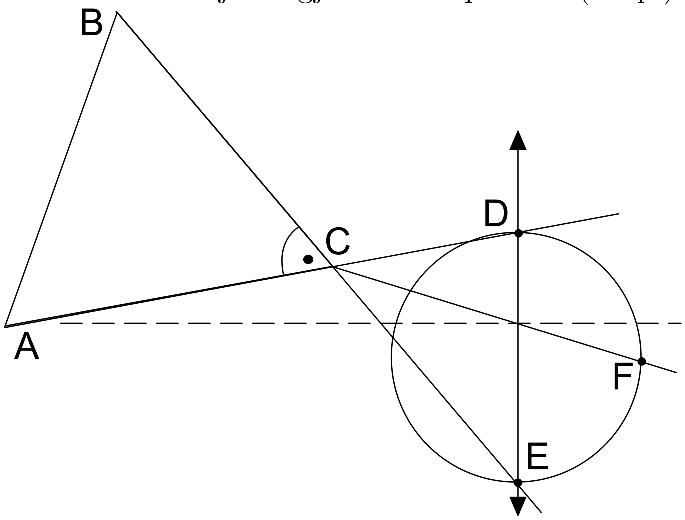
$$m_{\text{veesammas}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta t = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Nüüd saame leida vee massi M, mis jõuab kaussi:

$$M = m_{\text{kausis}} + m_{\text{veesammas}} = m_{\text{skaalal}} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{2h}{g}} = m_{\text{skaalal}}.$$

(*10 p.*) *Autor: Krister Kasemaa.*

8. (*KOLMNURK*) Tähistame kolmnurga kujutise tähtedega ABC (vt joonis) ja olgu täisnurkse tipu kujutisele C vastav originaal punktis F. Paneme tähele, et sirge kujutis on sirge ning need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis. Lõikugu küljega AC määratud sirge läätse tasandiga punktis D ning olgu selle sirge kujutis sirge DF. Analoogselt defineerime sirge BC abil punkti E ja sirge FE. Et $\angle DFE$ on ülesande tingimuse kohaselt täisnurk, siis peab see asuma ringjoonel, mis on ehitatud lõigule DE kui diameetrile.Teisest küljest punktist C läbi läätse keskpunkti tõmmatud kiir läätses ei murdu ja seetõttu peab punkt F asuma sellel kiirel. Niisiis leiamegi otsitava punkti F kui antud kiire ja ringjoone lõikepunkti. (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.*



9. (*ÕHKJAHUTUS*)
Piirkonnas, mis on dioodile lähedal ja kus seetõttu mööda plaati leviv soojusenergia pole veel jõudnud õhku kaduda, on soojusvoog $P_s = 2\pi r t k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 2\pi t k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\ln r}$, kus P_s on soojusena dissipeeruv soojusvõimsus. Näeme, et selles piirkonnas, kus antud eeldus kehtib, peab graafik olema sirgjoon ja selle tõus võrduma $\tan\alpha = 2\pi t k$. Graafikul on väikeste r väärtuste juures tõepoolest selline piirkond olemas ning graafiku puutuja tõus on seal $\tan\alpha \approx 23{,}5\,\mathrm{K}$. Seega $P_s = kt \cdot 23{,}5\,\mathrm{K} \approx 28{,}5\,\mathrm{W}$. Kiiratud võimsus $P_k = P - P_s$ ning kasutegur $\eta = P_s/P \approx 0.43$. (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda.*

10. (*PULK*) Esimese ja teise kaadri-intervalli jooksul pöördus pulk sama nurga võrra, see tähendab, et peaaegu horisontaalne pulga asend peab pärinema keskmiselt kaadrilt ja ülejäänud asendid on ca $\pm 140°$ võrra pööratud. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et vasak alumine asend vastab esimesele kaadrile (kui see vastab tegelikult viimasele, siis vaatleme pulga liikumist tagurpidi kulgevas ajas). Jooniselt teeme kindlaks, et esimese kaadriintervalli jooksul nihkus pulga peenem ots horisontaalsihis paremale ca $p_1 = 155\,\mathrm{cm}$ võrra ja jämedam ots — $j_1 = -20\,\mathrm{cm}$ võrra. Et teatud pulga punkti horisontaalne nihe esimese kaadriintervalli jooksul s_1 on lineaarne funktsioon selle punkti kaugusest x pulga jämedamast otspunktist, siis $s_1 = p_1 \frac{x}{L} + j_1(1 - \frac{x}{L})$, kus L tähistab pulga pikkust. Analoogselt leiame nihked teise kaadriintervalli jaoks $p_2 = -105\,\mathrm{cm}$ ja $j_2 = 75\,\mathrm{cm}$ ning $s_2 = p_2 \frac{x}{L} + j_2(1 - \frac{x}{L})$. Et massikeskme horisontaalne kiiruskomponent ei muutu, siis $s_1 = s_2$, millest $\frac{x}{L}(p_1 - p_2 + j_2 - j_1) = j_2 - j_1$, st $x = L\frac{95}{355} \approx 27\,\mathrm{cm}$.

Teeme nüüd jooniselt kindlaks massikeskme vertikaalsihilised nihked: $v_1 = 45\,\mathrm{cm}$ ja $v_2 = -50\,\mathrm{cm}$. Olgu kaadriintervall τ; massikeskme keskmine kiirus esimese kaadriintervalli jooksul oli v_1/τ ja teise jooksul — v_2/τ ning muutus - $(v_2 - v_1)/\tau = -g\tau$, seega $\tau = \sqrt{(v_1 - v_2)/g} \approx 0{,}31\,\mathrm{s}$. (*14 p.*) *Autor: Jaan Kalda.*