Eesti koolinoorte 51. täppisteaduste olümpiaad

Füüsika lõppvoor. 7. märts 2004. a. Keskkooli ülesannete lahendused

1. ülesanne (JAHIPÜSS)

Püssi kiiruse u_0 vahetult peale tulistamist saame leida impulsi jäävuse seadusest: $Mu_0 = mv_0$, kus v_0 on otsitav kuuli algkiirus. Peale tulistamist alustab püss niidi otsas pendlisarnasat liikumist. Oma algse kineetilise energia $Mu_0^2/2$ kulutab püss tõusmiseks kõrgusele h, kus tema potentsiaalne energia on Mgh. Energia jäävuse tõttu:

$$\frac{1}{2}\,Mu_0^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad u_0 = \sqrt{2gh}\,.$$

Siit

$$v_0 = \frac{Mu_0}{m} = \frac{M}{m}\,\sqrt{2gh} \approx 693 \text{ m/s}.$$

2. ülesanne (VEEPARK)

Nii Jüri kui ka Mari puhul peab kehtima energia jäävuse seadus:

$$\frac{1}{2}\,mv_0 + mgh = \frac{1}{2}\,mv + Fs,$$

kus v_0 on algkiirus, h – mäe korgus, v – lõppkiirus ja Fs – töö takistusjõu vastu. Avaldis lõppkiiruse jaoks saab kuju

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh - 2Fs/m}.$$

Jooniselt leiame, et $h = 7$ m. s määramiseks leiame teepikkuse iga sirge lõigu jaoks ning liidame kokku. Jüri läbis teepikkuse

$$s_j = \sqrt{20^2 + 4^2} + \sqrt{35^2 + 3^2} = 55{,}5 \text{ m}$$

ning Mari teepikkus oli

$$s_m = \sqrt{25^2 + 3^2} + 15 + \sqrt{30^2 + 4^2} = 70{,}4 \text{ m}.$$

Lõppkiiruse väärtuseks saame nüüd Mari jaoks

$$v_m = \sqrt{0 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 7 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 70{,}4}{60}} \approx 9{,}5 \text{ m/s}.$$

ning Jüri jaoks

$$v_j = \sqrt{1 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 7 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 55{,}5}{70}} \approx 10{,}3 \text{ m/s}.$$

Seega Jüri on lõpus 1,08 korda kiirem kui Mari.

3. ülesanne (KAITSMED)

Kuna ülesande tingimuste kohaselt vool läbi kaitsme M on alati suurem kui vool läbi kaitsme N (kui kumbki kaitsmetest ei ole veel läbi põlenud), siis koguvoolu kasvades põleb esmalt läbi kaitse M. Koguvoolu väärtus on siis $(1+R_M/R_N)\, I_{Mmax} = 1{,}5$ A. Pärast kaitsme M läbipõlemist läbib kogu vool kaitset N ja võib omandada maksimaalse väärtuse 1,2 A. Kuna see väärtus on väiksem kui 1,5 A, on maksimaalne võimalik voolu väärtus 1,5 A (või matemaatiliselt täpne olles – sellele väärtusele kuitahes lähedane väiksem väärtus). Juhul, kui $I_{Nmax} = 1{,}7\,\mathrm{A}$ saavutab vool oma maksimaalväärtuse 1,7 A alles pärast kaitsme läbipõlemist.

4. ülesanne (MOOTORRATAS)

Kuna mootorratas ei pöörle, siis mootorrattale mõjuvate jõumomentide summa mistahes punkti, näiteks masskeskme, suhtes peab olema null ehk $F_h h = Nl$, kus N on tagarattale mõjuv maapinna normaalreaktsioon ja F_h – tagarattale mõjuv hõõrdejõud. Kuna N kompenseerib mootorratta kaalu, F_h aga annab kiirenduse a, siis $N = mg$ ja $F_h = ma$, kus $m = m_1 + m_2$. Seega $a = lg/h \approx 8{,}2$ m/s^2. Kui tagumine ratas on libisemise piiril, siis $\mu = F_h/N = l/h \approx 0{,}83$.

5. ülesanne (MÄED)

Lumised mägede tipud toimivad hajusate valguskiirguritena seni, kuni otsene päikesevalgus paistab mägede tippudele. Seega läheb orus pimedaks, kui päike ei paista üle läänepoolse mäe enam idapoolse mäe tippu. Selleks peab Maa pöörama mägede tippe ühendava ja läänepoolse mäe tippu oru põhja keskpunktiga ühendava sirgete vahelise nurga α võrra:

$$\alpha = \arctan\frac{H}{l/2} - \arctan\frac{H-h}{l} = 32{,}9^\circ.$$

Kuna ööpäeva pikkus on 24 tundi, siis pöörleb Maa ühe tunniga

$$\frac{360^\circ \cdot 1\ \mathrm{h}}{24\ \mathrm{h}} = 15^\circ$$

võrra. Seega pöörab Maa nurga α võrra ajaga

$$\frac{32,9^\circ}{15^\circ} \cdot 1\,\mathrm{h} = 2\ \mathrm{h}\ 12\ \mathrm{min}.$$

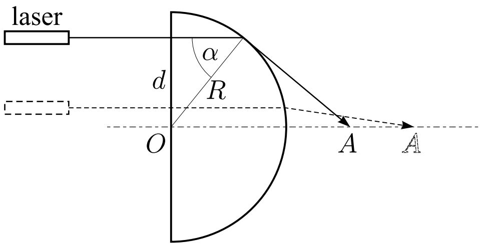
6. ülesanne (PLIIT)

Vee temperatuur langeb jää sulamise tõttu. Kui jää on sulanud ja temperatuur anumas on ühtlustunud, hakkab vee temperatuur uuesti tõusma. Selleks hetkeks kui veele on antud soojushulk, mis on vajalik lisatud jää sulatamiseks, saab vee temperatuur uuesti võrdseks vee temperatuuriga enne jää lisamist. Temperatuuri T_1 juures kulub kogu kannu võimsus vee soojendamiseks, $T > T_1$ puhul aga tekivad vee ja toatemperatuuri erinevusest tingitud soojuskaod kannust õhku, mistõttu vee temperatuuri kasvu kiirus aeglustub (vt. graafikut). Vee soojendamise kiirus on võrdeline dT/dt, s.t. graafiku tõusunurga tangensiga. Temperatuuril 70°C on see võrdne $P' = P \tan\alpha' / \tan\alpha$ Jooniselt leiame $\alpha \approx 0{,}5$ ja $\alpha' \approx 0{,}25$, seega $P' = 500$ W. Samuti näeme, et vee temperatuur $T_3 = 75$°C taastub aja $\Delta t \approx 37$ s jooksul. Seega jää sulatamiseks ja temperatuurini T_3 soojendamiseks kulub soojushulk $Q = P'\Delta t \approx 18{,}5$ kJ. Jää mass

$$m = \frac{Q}{L + c\,(T_3 - T_0)} \approx 28 \text{ g}.$$

7. ülesanne (LASER)

d maksimaalse väärtuse määrab piirjuht, kus laserkiir langeb tagumisele pinnale täieliku sisepeegelduse piirnurga all, s.t. $\sin\alpha = 1/n$. Teiselt poolt, $\sin\alpha = d_{\max}/R$, seega $d_{\max} = R/n$.



Kui $d = d_{\max}$, siis väljuv laserkiir on silinderpinnale puutujaks. Seega

$$\begin{aligned} l &= R\cos\alpha + d_{\max}\tan\alpha = R\left[\sqrt{1-\sin^2\alpha} + \frac{1}{n}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right] \\ &= R\left[\sqrt{1-1/n^2} + \frac{1}{n}\frac{1/n}{\sqrt{1-1/n^2}}\right] = \frac{nR}{\sqrt{n^2-1}}\,. \end{aligned}$$

Kui $d \to 0$, siis laserkiir langeb tagumisele pinnale nurga all $\alpha \approx d/R$. Murdumisnurk on $\beta = n\alpha = nd/R$. Pinnanormaali kaldenurk on samuti α, seega väljunud kiire kaldenurk on $\gamma = \beta - \alpha = (n-1)\, d/R$. Nüüd saame

$$l = R + \frac{d}{\gamma} = R + \frac{R}{n-1} = \frac{nR}{n-1}\,.$$

8. ülesanne (ELEKTRIVÄLI)

Kuulidele indutseeritakse sellised laengud $\pm q$, et kuulide vaheline pinge oleks null,

$$U = El - 2kq\,(r^{-1} - l^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad q \approx \frac{Elr}{2k}.$$

varrast pingestav jõud on

$$F = qE = \frac{E^2 lr}{2k}\,.$$

Väikeste võnkumiste puhul on tegemist matemaatilise pendliga, kus raskusjõu asemel on elektrivälja jõud F ning pendli pikkuseks $l/2$ (võnkumine toimub massikeskme ümber). Seega

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2F}} = \frac{2\pi}{E}\sqrt{\frac{mk}{r}}\,.$$

9. ülesanne (NÖÖBID)

Klotsile A mõjuva hõõrdejõu kompenseerib nööri pinge, sestap on need kaks jõudu samasihilised ning klotsi A juures peab pöörleva aluse kiirusvektor olema nööri sihiline. Pöörlemiskese peab lebama punktist A tõmmatud lõigu AB ristsirgel, pöörlemiskeskme O leiame tingimusest |OA| = |AB|. Edasi on jooniselt lihtne mõõta |OB| ning leida $b = a|OB|/|OA| = 14\,\mathrm{cm}$. Klotsile B mõjub hõõrdejõud, mille siht on risti sirgega OB. Samuti mõjub talle mõlema niidi pinged, mis on paralleelsed vastavate niitidega. Märgime punkti C teisel niidil ning jagame vektori $\overrightarrow{BC}$ (mis kujutab teatud mõõtkavas selle niidi pinget) kaheks komponendiks, mis on paralleelsed kahe ülejäänud jõuga, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$. Siinjuures lõik BD on risti lõiguga OB ja lõik BE on paralleelne lõiguga AB. Et niidi AB pinge on võrdne klotsile A mõjuva hõõrdejõuga ja hõõrdejõudude suhe annab masside suhte, siis $m_B = m_A|BD|/|BE|$. Jooniselt leiame $m_B = 1{,}8\,\mathrm{g}$.

10. ülesanne (PEEGLID)

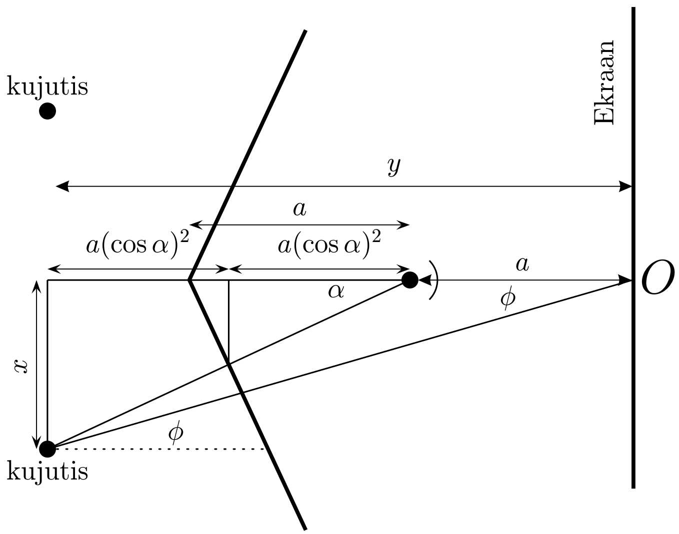
Leiame valgusallika kujutised peeglites. Punkti O ümbrusse langevat valgust võime siis vaadelda kujutistest kiiratud valguse superpositsioonina. Leiame järgnevalt $\sin\phi$. Antud geomeetrilisest konstruktsioonist saame:

$$x = 2a\cos\alpha\sin\alpha, \quad y = 2a\cos\alpha\cos\alpha + a,$$

$$\tan\phi = \frac{x}{y} = \frac{2a\cos\alpha\sin\alpha}{2a\cos\alpha\cos\alpha + a}, \quad \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{1+(\cot\phi)^2}},$$

$$\sin\phi = \left[1 + \left(\frac{2a\cos\alpha\cos\alpha + a}{2a\cos\alpha\sin\alpha}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{\cos\alpha + 1/(2\cos\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + (\cos\alpha + 1/(2\cos\alpha)^2)}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2 + 1/(4\cos^2\alpha)}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{8\cos^2\alpha + 1}}.$$



Olgu punkti O läheduses mingis punktis M interferentsi miinimum. Kui liiguksime sellest punktist d võrra ülespoole, siis alumisest kujutisest tuleva valguse teekond pikeneb $d\sin\phi$ võrra ning ülemisest kujutisest tuleva valguse teekond lüheneb $d\sin\phi$ võrra. Seega saame punktiga M võrreldes käiguvahe $2d\sin\phi$. Sellele vastab miinimum juhul kui $\lambda = 2d\sin\phi$. Seega saamegi vastuseks

$$\lambda = \frac{2d\sin 2\alpha}{\sqrt{8\cos^2\alpha + 1}}.$$

E1. ülesanne (PLAAT)

Määrame esmalt plaadi raskuskeskme. Selleks paigutame plaadi laua servale nii, et see on peaaegu kukkumas. Märgime laua serva plaadile. Pöörame plaati ning kordame kirjeldatud tegevust. Saadud kahe sirge lõikepunkt ongi plaadi raskuskeskme asukoht. Nüüd on juba lihtne määrata plaadi mass kangkaalumise põhimõttel

$$m_{\text{plaat}} = m_{\text{koormis}} \frac{l_{\text{koormis}}}{l_{\text{plaat}}},$$

kus l_{koormis} ja l_{plaat} on vastavad kangi õlad. Kui koormise massi võib lugeda täpseks, siis maksimaalne relatiivne viga

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{koormis}}}{l_{\text{koormis}}} + \frac{\Delta l_{\text{plaat}}}{l_{\text{plaat}}}.$$

Plaadi mass $M = m_{\text{plaat}}\,(1 \pm \delta)$.

E2. ülesanne (PIRN)

Ühendame jadamisi patarei, lambi ja testri kui ampermeetri ning registreerime lambi töövoolu I_1. Seejärel lisame samasse ahelasse takisti ning mõõdame töövoolu I_2. Nüüd teeme samad katsed ilma ampermeetrita, kuid mõõtes testri kui voltmeetriga pinget lambil. Saame vastavad pinge väärtused U_1 ja U_2. Kuna ampermeetri takistus ja voltmeetri juhtivus (st takistuse pöördväärtus) on tühiselt väike, siis võime eeldada, et voolutugevused on samad, mis eelmistes katsetes. Arvutame Ohmi seadusest lambi takistused mõlemal toitepingel (R_1 ja R_2). Mõõdame lambi takistuse testri kui oommeetriga. Kuna testri kui oommeetri (ülesandes antud) töövool on sadu kordi väiksem juba meile teada olevast lambi töövoolust, siis saame määrata suuruse R_0 (tõsi küll, suure piirveaga, kuid lõpptulemuses kajastub see vähe). Logaritmime seost $R - R_0 = cU^n$ ja saame $\ln(R - R_0) = \ln c + n \ln U$. Saadud kahe katsepunkti alusel koostame võrrandisüsteemi:

$$\ln(R_1 - R_0) = \ln c + n \ln U_1, \quad \ln(R_2 - R_0) = \ln c + n \ln U_2.$$

Olles lahutanud esimesest võrrandist teise, avaldame n ja c kujul

$$n = \frac{\ln(R_1 - R_0) - \ln(R_2 - R_0)}{\ln U_1 - \ln U_2}\ ; \quad c = \frac{R_1 - R_0}{U^n}.$$

Olles teostanud mõõtmised ja arvutused, saame $n \approx 0{,}6$ ning $c \approx 5{,}5\ \Omega\,\mathrm{V}^{-0{,}6}$.