Eesti koolinoorte 52. täppisteaduste olümpiaad

Füüsika lõppvoor. 9. aprill 2005. a. Keskkooli ülesannete lahendused

1. ülesanne (`Kivi`)

Läheme üle vabalt langevasse taustsüsteemi. Selles süsteemis liiguvad vabalt langevad kehad konstantse kiirusega. Kiirus, mille kivi saavutab langevas süsteemis palli viskamise hetkeks Δt, on $u = g\Delta t$; see ei tohi olla suurem, kui maksimaalne viskekiirus $v_{\max}$. Seega

$$\Delta t \leq \frac{v_{\max}}{g}\,.$$

Avaldame palli viskekiiruse energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2gh}\,.$$

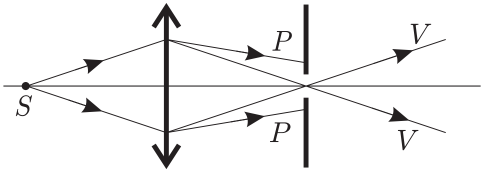
Maksimaalne viivituse aeg

$$\Delta t_{\max} = \frac{v_{\max}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2\,\mathrm{s}.$$

2. ülesanne (`Ühevärviline valgus`)

Aine murdumisnäitaja sõltub alati valguse lainepikkusest. Sellepärast on erineva lainepikkusega kiirguste jaoks läätse fookused erinevates kohtades. Nähtust nimetatakse kromaatiliseks aberratsiooniks. Valge valgus koosneb erinevate lainepikkustega (erinevat värvi) komponentidest. Tekitame läätsega ekraanile punktvalgusallika kujutise teatud värvi jaoks ja juhime selle avasse. Teiste värvuste jaoks on kujutised kas ekraani ees või ekraani taga ning ekraanil pole punkt, vaid suurem laik. Kui see laik on august suurem, siis vastavad lainepikkused läbivad augu vaid osaliselt. Seega domineerib auku läbivas valguses see lainepikkus, mille puhul on punktvalgusallika kujutis ekraani tasapinnas. Teiste lainepikkuste osakaal on seda väiksem, mida väiksem on auk ning tugevam on läätse materjali dispersioon.

Efekti praktilise realiseerimise puhul tuleb tähele panna, et reaalsed läätsed pole ideaalsed, punkti kujutis ei ole punkt, vaid mõnevõrra laialivalgunud laik (seda



Joonis 1: Värvi eraldamine valgest valgusest

nähtust nimetatakse sfääriliseks aberratsiooniks). Efekti realiseerimiseks on vaja, et kromaatiline aberratsioon oleks tugevam sfäärilisest aberratsioonist (lainepikkuste erinevusest tingitud kujutise laialivalgumine oleks tugevam läätse mitte-ideaalsusest tingitud laialivalgumisest). Et sfääriline aberratsioon väheneb apertuuri (läätse avale langeva või sealt väljuva valguskoonuse nurga) vähenemisel, siis lause "Läätse fookuskaugus on palju suurem läätse läbimõõdust" põhjal võib lugeda, et sfääriline aberratsioon on nõrk.

3. ülesanne (`Balloon`)

Termodünaamika I aluses arvestame märke: $Q = \Delta U + A$, sest soojust võeti süsteemilt ära ja tööd tehti välisjõudude vastu: $\Delta U = -Q - A$. Kuivõrd $A = p\Delta V$ ja $Q = \lambda\rho_v V$, siis

$$\Delta U = -\lambda\rho_v V - p\left(\frac{V\rho_v}{\rho_j} - V\right) = -\rho_v V\left[\lambda + p\left(\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1}\right)\right].$$

Paneme tähele, et avaldis nurksulgudes peaks kujutama endast sulamissoojust normaaltingimustel (sest vee võib viia samasse lõppolekusse ka teisel viisil — muutes ta jääks normaaltingimustel ning seejärel viies rõhu etteantud väärtuseni; et jää loeme kokkusrumatuks, siis rõhu tõstmisel tööd ei tehta). Paistab, et tegemist pole siiski päris hariliku veega, sest

$$\lambda + p\left(\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1}\right) = 323\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \neq \lambda_0 = 334\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

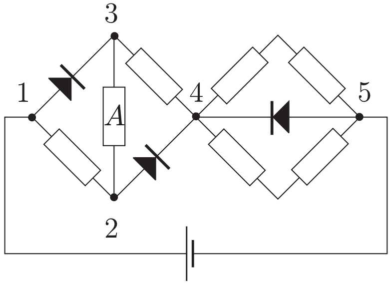
Arvandmete asendamisel leiame $\Delta U = -3{,}23$ MJ.

Vee entroopia muudu leidmisel arvestame, et (ülerõhu vastu tehtud tööga võrdne) osa üleantud soojusest läks kesta entroopia suurendamisele. Seega

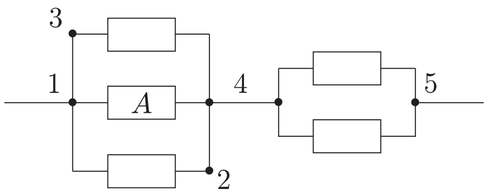
$$\Delta S = \frac{\Delta U}{T} \approx -11{,}8\,\frac{\text{kJ}}{\text{K}}.$$

4. ülesanne (`Takistid`)

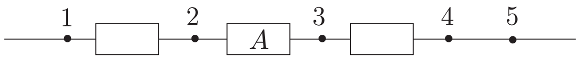
Paneme tähele, et pinge absoluutväärtus ahela otstele U ei muutu. Arvestades, et päripidise voolu korral võib dioodi klemmid lugeda lühistatuks ning vastuvoolu korral isoleerituks, saame kummagi polaarsuse jaoks koostada algse ahela (vt. joon. 2) asemele ekvivalentsed ahelad (vt. joon. 3 ja 4).



Joonis 2: Esialgne skeem



Joonis 3: Ekvivalentne skeem ühe polaarsuse puhul



Joonis 4: Ekvivalentne skeem teise polaarsuse puhul

<u>*Esimene olukord (joon. 3)*</u>

Takistil A eralduv võimsus $P_1 = I_1^2 R$, kus

$$I_1 = \frac{I}{3} = \frac{1}{3}\frac{U}{r_1}$$

on vaadeldavat takistit läbiva voolu tugevus ning

$$r_1 = \frac{R}{3} + R = \frac{4}{3}R$$

on kogu ahela takistus. Seega

$$P = \frac{R}{9}\frac{U^2}{r_1^2} = \frac{U^2}{R}\frac{1}{9}\frac{9}{16} = \frac{1}{16}\frac{U^2}{R}.$$

<u>*Teine olukord (joon. 4)*</u>

Takistit A läbiv vool $I_2 = U/3R$. Seega võimsus

$$P_2 = \left(\frac{U}{3R}\right)^2 R = \frac{1}{9}\frac{U^2}{R}.$$

Võimsuste suhe

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{16},$$

seega polaarsuse muutmisel muutub takistil A eralduv võimsus 9/16 korda.

5. ülesanne (Veetünn)

Leiame esmalt veejoa väljumise kiiruse. Kiiruse avaldis on tuntud Torricelli seadusena, kuid selle leidmiseks võime arutleda nõnda: avast väljuv juga omab kineetilist energiat $mv^2/2$, teisalt peab see olema võrdne potentsiaalse energiaga, mis saadakse vee ülemiselt pinnalt kuni auguni langedes: $mg(1-x)h$. Seega väljumiskiirus avaldub:

$$v = \sqrt{2g(1-x)h}.$$

<u>*Märkus*</u>: impulsi jäävusest saaksime (võrreldes tünni vasakule ja paremale seinale mõjuvate rõhumisjõudude vahe avaldist ning veejoa impulssi) tulemuse $v = \sqrt{g(1-x)h}$. See avaldis kehtib siis, kui vee liikumine tünnis pole laminaarne ning *energia ei säili* (läheb veekeeristesse). Laminaarse (energiakadudeta) voolu korral tuleks rõhumisjõudude vahe leidmisel arvestada Bernoulli seadusest tingitud *rõhu muutust*, mistõttu impulsi jäävusest tuletatud vastus ei kehti. Kuivõrd antud ülesandes on voolu laminaarsuse küsimus jäetud täpsustamata, siis loetakse mõlemal meetodil saadud tulemused õigeks.

Et veejoal vertikaalset kiiruskomponenti esialgu pole, kulub langemiseks aeg

$$\tau = \sqrt{\frac{2\,(H + xh)}{g}}\,.$$

Selle ajaga liigub aga veejuga horisontaalsihis kaugusele $L = v\tau$ ehk:

$$L = 2\sqrt{(1 - x)\,h\,(H + xh)}\,,$$

mida aga ongi antud graafikul kujutatud.

Seega piisaks H ja h leidmiseks kahe joone punkti koordinaatide määramisest ning tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisest. Et aga võimalikult lihtsalt tulemuseni jõuda, kasutame tähelepanukut, et $x = 0$ korral $L = 2\sqrt{hH}$. Võtame graafikult lugemi punktis $x = 0$ ning saame **esimese võrrandi**: $hH = 9\,\mathrm{m}^2$.

Nagu öeldud, võib teise võrrandi saada suvalise punkti abil, kuid uurime natuke ekstreemumtingimust. Tähistame esmalt $\alpha = H/h$, L avaldub seega

$$L = 2h\,\sqrt{(1 - x)(\alpha + x)}\,.$$

Kui võtame L-ist x-i järgi tuletise, näeme, et L omab ekstreemumväärtust $x = (1 - \alpha)/2$ korral. Selle tulemiseni võib jõuda ka arutledes nõnda: $y = (1-x)(\alpha+x)$ kujutab endast allapoole suunatud parabooli nullkohtadega 1 ja $-\alpha$, ekstreemumväärtus on seega nende vahel ehk kohal $x = (1 - \alpha)/2$. Asendame selle L-i avaldisse:

$$L = 2h\,\sqrt{\left(1 - \frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}\right)} = 2h\,\frac{1+\alpha}{2} = h + H.$$

Seega saame **teise võrrandi** L-i maksimumväärtust kasutades:

$$H + h = 10\ \mathrm{m}.$$

Nende kahe lihtsa võrrandi lahendamisel leiame väärtused: $h = 9$ m ja $H = 1$ m.

6. ülesanne (`Tsunami`)

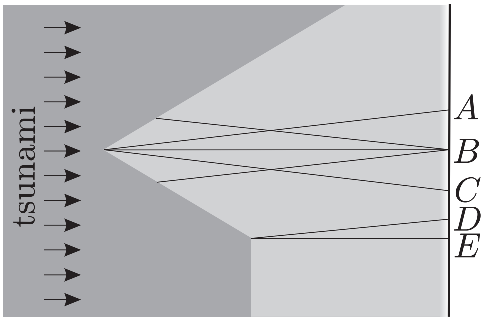
Laine levik toimub geomeetrilise optika seaduste kohaselt: astangu juures on laine langemisnurga ja murdumisnurga suhe

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{gh_1}}{\sqrt{gh_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \arcsin\left(\sin\alpha_1\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\right).$$

Seal astangu osas, kus langemisnurk on $0°$, murdumist ei toimu. Seal aga, kus $\alpha_1 = 60°$, on murdumisnurk

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\sin 60°\sqrt{\frac{3200}{5000}}\right) \approx 44°.$$

Seega kaldub laine esialgsest levimissuunast kõrvale nurga $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 16°$ võrra. Niisiis jõuab rannalõigule AC kaks lainet ning rannalõigule DE ei jõua üldse lainet. Punkti B jõuavad mõlemad lained üheaegselt (sümmeetria tõttu) ning seal ongi laine kõige kõrgem.



Joonis 5: Tsunami

7. ülesanne (Mullitaja)

Arvestades mullide arvu jäävust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimase leiame võrdustades takistusjõu ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu muutumisel sügavuse vähenemisel.

Mullikesele mõjuvad veetakistusjõud F ja üleslükkejõud F_A. Nende võrdusest

$$6\pi\eta R v = g\left(\rho - \rho_{õhk}\right)V,$$

kus V on mullikese ruumala. Kuna ülesande tingimustel $\rho \ll \rho_{õhk}$ ja tähistades indeksitega "H" ja "0" vastavalt situatsioone veekogu põhjas ja pinna lähedal, saame

$$6\pi\eta R_H v_H = g\rho V_H \tag{1}$$

$$6\pi\eta R_0 v_0 = g\rho V_0 \tag{2}$$

Võrrandeid 1 ja 2 omavahel jagades ning kuna $V_i = (4/3)\pi R_i^3$, saame mullikeste vahekauguse suhte

$$\frac{L_0}{L_H} = \frac{v_0}{v_H} = \frac{V_0 R_H}{V_H R_0} = \left(\frac{V_0}{V_H}\right)^{2/3}.$$

Kuna $V_0 p_0 = V_H p_H$ ja $p_H = p_0 + g\rho H$, siis

$$\frac{L_0}{L_H} = \left(1 + \frac{\rho g H}{p_0}\right)^{2/3} = 2{,}4,$$

s.t. mullikeste vahemaa suureneb 2,4 korda.

8. ülesanne (Kondensaatorid)

Tegu on kondensaatorite jadaühendusega, mille tõttu laeng mõlemal kondensaatoril peab olema ühesugune. Kondensaatorite kogumahtuvuse leiame valemist

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 1{,}2C.$$

Siit laeng on $q = 1{,}2CU$. Pinge kondensaatoril mahtuvusega $2C$ on seega $U_1 = q/C_1 = 0{,}6U$ ning kondensaatoril mahtuvusega $3C$ vastavalt $U_2 = 0{,}4U$. Eeldame, et elektriväli on vaid kondensaatorite sees. Elektrivälja tugevus neis on nüüd vastavalt

$$E_1 = \frac{-U_1}{2d} = \frac{-0{,}3U}{d} \quad \text{ja} \quad E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{0{,}4U}{d}.$$

Kuna elektriväljad peavad olema suunatud vastupidistes suundades, siis ühe elektrivälja tugevuse võtsime negatiivseks. Määrame nüüd horisontaalsuunalise kiirenduse seosest $Eq = ma$. Esimese kondensaatori puhul on see

$$a_1 = \frac{E_1 q}{m} = \frac{-0{,}3Uq}{md}\,,$$

teise puhul aga

$$a_2 = \frac{E_2 q}{m} = \frac{0{,}4Uq}{md}\,.$$

Vertikaalsuunaline kiirus on kogu aeg sama, selle tõttu aeg, mille jooksul asub osake mõlema kondensaatori elektrivälja mõjusfääris, võrdub $t = l/v$. Selle aja jooksul muutub horisontaalsuunaline kiirus at võrra. Seega teisest kondensaatorist väljumise hetkel on osake kiirus

$$v_h = ta_1 + ta_2 = t\,(a_1 + a_2) = \frac{0{,}1Uql}{mdv}\,.$$

Trajektoori kaldenurga tangens on järelikult

$$\tan\alpha = \frac{v_h}{v} = \frac{0{,}1Uql}{mdv^2}\,.$$

9. ülesanne (`Kosmosejaam`)

Maa pöörlemise tõttu ümber oma telje tekivad trajektoori nihked. Mõõdame nihke pikkuse ekvaatoril Δl ning ekvaatori pikkuse (ehk kogu kaardi laiuse) l. Nende suhe määrab kosmosejaama nurkkiiruse ω_J ja maa pöörlemise nurkiiruse ωM suhte:

$$\alpha = \frac{l}{\Delta l} = \frac{\omega_J}{\omega_M} \approx 15{,}7.$$

Arvestades, et maa pöörlemise nurkkiirus on $\omega_M = 2\pi/T$, kus T on ööpäeva pikkus ehk 86400 s, leiame

$$\omega_J = \alpha\omega_M = \frac{2\pi\alpha}{T}\,.$$

Kosmosejaamale mõjuv gravitatsioonijõud määrab kesktõmbekiirenduse:

$$mg' = m\omega_J^2(R+h),$$

kus g' on raskuskiirendus kõrgusel h maapinnast. Gravitatsiooniseadusest teame, et raskuskiirendus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga, millest

$$g' = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

Kombineerides kaks viimast võrrandit, saame

$$\omega_J^2(R+h) = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

kust ostitav kõrgus on

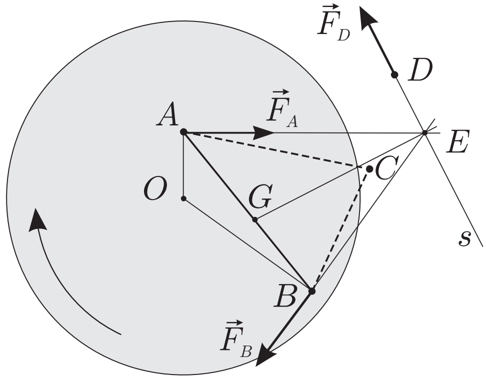
$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega_J^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2\alpha^2}} - R \approx 359 \text{ km}$$

Märkus: Tegelik kõrgus varieerub 350 ja 365 km vahel (nagu ka Maa raadius ei ole kõikjal ühesugune). Siin α väärtus oli mõõdetud suhteliselt täpsete arvutigraafika vahenditega, joonlauga joonise mõõtmise korral esinevate ebatäpsuste tõttu võib vastus erineda tegelikust kuni 200 kilomeetri võrra.

10. ülesanne (Ketas)

(a) Hakkab liikuma, sest summarne jõumoment punkti C suhtes koosneb kahest liidetavast, mis omavad ühte ja sama märki ning on nullist erinevad. Selles veendumiseks tuleb tõmmata punktidesse A ja B rakendatud hõõrdejõudude pikendused AE ja BE (E on nende pikenduste lõikepunkt), mis on risti vastavalt raadiustega OA ja OB (vt. joon. 6).

(b) Süsteemile mõjub kolm horisontaalsuunalist jõudu. Jõumomentide tasakaalu tingimusest järeldub et nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis E. Olgu kolmas keha punktis D. Siis punkti D rakendatud hõõrdejõud peab olema suunatud piki sirget ED. Teisest küljest, jõudude tasakaalu tingimusest johtuvalt peavad hõõrdejõudude vektorid moodustama võrdhaarse kolmnurga $\vec{F}_A+\vec{F}_B+\vec{F}_C = 0$ (võrdhaarse, sest punktidesse A ja B rakendatud jõud on moodulilt võrdsed, $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$).



Joonis 6: Pöörlev ketas

Selletõttu peab vektorite $\vec{F}_A$ ja $\vec{F}_D$ vaheline nurk võrduma vektorite $\vec{F}_D$ ja $\vec{F}_B$ vahelise nurgaga. Niisiis peab sirge ED ristuma nurga $\angle AEB$ poolitajaga EG. See tähendab, et punktihulgaks X on sirge s, mis ristub nurga $\angle AEB$ poolitajaga EG. Lõpetuseks paneme tähele, et hõõrdejõud $\vec{F}_D$ peab olema moodulilt väiksem, kui $\vec{F}_A$ ja $\vec{F}_B$, sest muidu toimuks kolmanda keha juures libisemine. Nii ka on, sest nurk $\angle AEB$ on väiksem kui 60° (60°, st. võrdkülgse kolmnurga puhul oleks jõudude kolmurgas $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$ kõik küljed võrdsed, 60° väiksemate nurkade puhul aga oleks vektor $\vec{F}_C$ oma moodulilt teistest väiksem).

E1. ülesanne (`Õhu tihedus`)

Õhu tihedust palli sees saab arvutada lähtudes ideaalse gaasi olekuvõrrandist

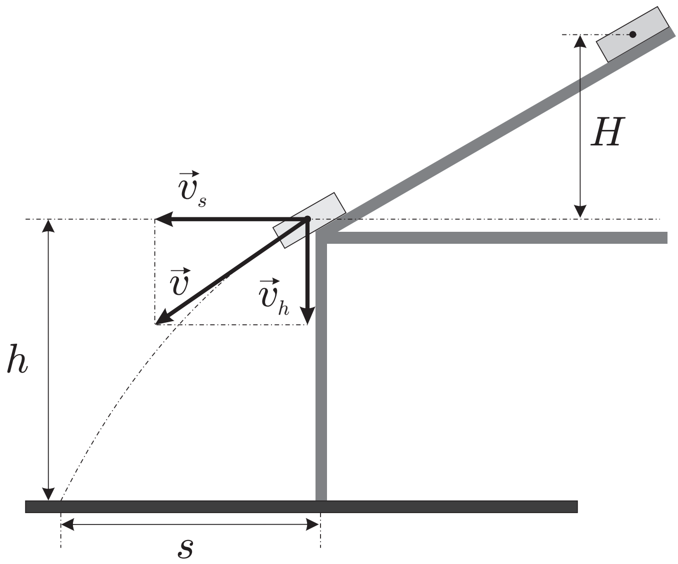
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT},$$

kus p on kogurõhk palli sees. Kuna välisrõhk on teada, siis taandub rõhu leidmine lisarõhu leidmisele palli sees. Lähtume eeldusest, et palli väikeste deformatsioonide korral muutub palli kuju, mitte aga oluliselt selle ruumala.

Kasutades markerit, vihti ja täispuhutud õhupalli, saame tasapinnaliseks surutud palli osa jäljendi millimeetripaberil ja leiame selle pindlala. Lugedes palli massi tühiseks leiame lisarõhu pallis. Saadud rõhu liidame välisrõhule ja leiame nõutud tulemuse. Arvestame, et temperatuur õhupallis on võrdne välistemperatuuriga.

E2. ülesanne (`Kaldpind`)

Kaldpinda mööda alla libiseva keha esialgne potentsiaalne energia muundub keha kineetiliseks energiaks kaldpinna lõpus ja hõõrdejõu tööks $E_p = E_k + A$. Hõõrdejõu töö muundub soojuseks, mis eraldub teatud soojushulgana. Seega eraldunud soojushulga leidmiseks peame teadma keha kineetilist energiat kaldpinna lõpus. Kuna kaldpinna ulatuses $\mu \neq \text{const}$, ei saa me kineetilise energia määramisel lähtuda klotsi libisemise keskmisest kiirusest, et sellest arvutada lõppkiirust $v = 2v_k$. Lõppkiiruse leidmiseks asetame kaldpinna alumise otsa täpselt laua äärele ja laseme klotsil maha kukkuda. Maas olevale paberile kukkunud klots jätab paberile jälje, mille alusel saame määrata kukkumise koha kauguse lauast ja klotsi kiiruse kaldpinna lõpus. Tähistades laua kõrguse h, klotsi jälje kauguse lauast s, kiiruse vertikaalsuunalise komponendi v_h ja kiiruse horisontaalsuunalise komponendi v_s, saame $v_s = v\cos\alpha$ ja $v_h = v\sin\alpha$.



Joonis 7: Kaldpind

$$s = v_s t = vt\cos\alpha, \qquad h = v_h t + \frac{gt^2}{2} = vt\sin\alpha + \frac{gt^2}{2}$$

Asendades t saame avaldada v^2:

$$v^2 = \frac{gs^2}{h\cos^2\alpha - s\sin\alpha\cos\alpha}\,.$$

Eraldunud soojushulk on seega

$$Q = mgH - \frac{mv^2}{2}$$

Klotsi massi saame, kui mõõdame klotsi küljed, arvutame klotsi ruumala ja kasutame massi leidmiseks tiheduse valemit $m = \rho V$. Arvatavasti valmistab raskusi kõrguse H mõõtmine, sest tuleb arvestada, et klotsi raskuskese asub kaldpinna otsast eemal ja ka kaldpinna paksust. Seega laua pinnast kõrgust mõõta ei tohi.

Teostatud: klotsi külgede mõõtmine ja massi arvutamine, kõrguse mõõtmine, mõõtemääramatuse arvutamine, kaldpinna paigutamine õige nurga alla ja s mõõtmine.