Eesti koolinoorte 54. füüsikaolümpiaad

Lõppvoor. 17. märts 2007. a.

Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. ülesanne (*KÜTTEKLAAS*)

Kehtivad valemid

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad R = \frac{\rho L}{S},$$

kus ρ on kattekihi eritakistus. Seega vastavalt orientatsioonile $R_H = \rho b/da$ ja $R_V = \rho a/db$ d, kus d on kattekihi paksus. Niisiis $P_H/P_V = a^2/b^2 = 0{,}25$.

2. ülesanne (*VEENUS*)

a) Maksimaalse eemaldumuse korral saame Maast, Veenusest ja Päikesest moodustada täisnurkse kolmnurga, mille täisnurga tipus asub Veenus. Siit Veenuse ja Maa raadiuste suhe

$$\alpha = \sin 46^\circ = 0{,}72.$$

b) Veenuse tiirlemisperioodi saame Kepleri seadusest

$$T_V = T_M \frac{1}{\sqrt{\alpha^3}}.$$

Maa tiirlemise nurkkiirus $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ ning Veenuse tiirlemise nurkkiirus $\omega_V = \frac{2\pi}{T_V}$. Nende suhtelise liikumise nurkkiirus

$$\Delta\omega = \omega_V - \omega_M = \omega_M \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1 \right)$$

ning suhtelise liikumise periood on

$$T_s = \frac{T_M}{\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1} = 570 \text{ päeva.}$$

Järjestikuste eemaldumiste vahele jääb vastavalt 88/360 osa või 272/360 osa sellest perioodist ehk päevades: 140 ja 430.

3. ülesanne (*KIIL*)

Kõik nurgad on tähistatud järgneval joonisel. α on meelevaldne (kuigi $\alpha \ll 1$). $\beta = \alpha/n$. $\gamma = \beta - \epsilon$. $\delta = n\gamma = \alpha - n\epsilon$. Kiire kõrvalekaldenurk

$$\phi = (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma) = (\alpha - \delta) + (\gamma - \beta) = n\epsilon - \epsilon = \epsilon(n-1).$$

Teades, et $\phi = 5\,\mathrm{mm}/2\,\mathrm{m} = 0.0025\mathrm{rad}$, saame

$$\epsilon = \frac{\phi}{n-1} = 0{,}005\mathrm{rad} = 0{,}29^\circ.$$

4. ülesanne (*HOORATAS*)

a) Hooratta kineetiline energia on $K = \frac{1}{2}M\omega^2R^2$, seega energia salvestustihedus $w = E/M = \frac{1}{2}\omega^2R^2$.

Olgu rõnga raadius r ja mass m. Mehaaniline pinge rõngas (σ) on määratud tsentrifugaaljõuga, millega kahte rõngapoolt üksteisest eemale tõugatakse. Vaatleme ühe rõngapoole väikest lõiku pikkusega Δl. Selle mass on $\Delta m = (\Delta l/2\pi r)m$ ja sellele mõjub tsentrifugaaljõud suurusega $\Delta F = \Delta m\omega^2 r$, kus ω on pöörlemise nurkkiirus. Selle jõu projektsioon vertikaalsihile on (vt. joonis)

$$\Delta F_{\|} = \Delta F\cos\alpha = \frac{m\omega^2}{2\pi}\Delta l\cos\alpha.$$

Ent $\Delta l\cos\alpha$ on lõigu Δl projektsioon horisontaalsihile. Järelikult summaarne jõud, mis mõjub ühele rõngapoolele, avaldub

$$F = \sum\Delta F_{\|} = \frac{m\omega^2}{2\pi}2r = \frac{m\omega^2 r}{\pi}.$$

Teiselt poolt, $F = 2\sigma S$, kus S on rõnga ristlõige. Viimase asendame seosest

$$m = \rho V = \rho(2\pi rS) \Rightarrow S = \frac{m}{2\pi r\rho}.$$

Kokkuvõttes saame

$$\sigma = \frac{F}{2S} = \omega^2r^2\rho.$$

Rõnga kineetiline energia

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2r^2}{2} = \frac{m\sigma}{2\rho},$$

millest $E/m = \sigma/2\rho$. Võttes $\sigma = \sigma_{\max}$, saame $E/m = 800\,\mathrm{kJ/kg}$.

5. ülesanne (*LAEV*)

Näitame, et laev peab sõitma nii, et voolukiirused stardihetkel t_s ja finišihetkel t_f on võrdsed, $v(t_s) = v(t_f)$. Teeme seda vastuväiteliselt. Vaatleme konkreetsuse mõttes liikumist B suunas, mil laeva kiirus kalda suhtes on $v_0 + v(t)$. Sellisel juhul on läbitud vahemaa L graafiku $v(t)$ ja joone $v = -v_0$ vahelise piirkonna pindala. Nihutame stardi ja finišiaega väikese ajavahemiku Δt võrra. Läbitav vahemaa muutub seejuures $\Delta t(v_f -$

v_s) võrra. Kui $v(t_s) \neq v(t_f)$, siis saame valida Δt märgi selliselt, et $\Delta t(v_f - v_s) > 0$, st sama aja jooksul läbitud vahemaa kasvab saades suuremaks Lst. Seega saaks sõiduaega vähendada ning stardihetk polnud optimaalne.

Eelpoolselgitatud tingimustele (stardi- ja finišihetke kiirused on võrdsed, graafiku ja joone $v = -v_0$ vaheline pindala võrdub 20 km-ga) vastavad stardiajad punktist A 22:20 ja punktist B 04:20.

6. ülesanne (*GAASID*)

Kogu protsessi jooksul om mõlema gaasi rõhud võrdsed ja konstantsed. Olgu vesiniku moolide arv n_0. Kuna alguses on ka temperatuurid võrdsed, siis valemmi $n = \frac{pV}{RT}$ põhjal näeme, et heeliumi moolide arv peab olema $3n_0$ Kosntantsel rõhul molaarne erisoojus avaldub kui $C_P = (\frac{i}{2} + 1)R$ (*see valem on tuletatav ka teistest rohkem tuntud valemitest*). Vesinik on kaheaatomiline gaas, heelium aga üheaatomiline, seega $i_{H_2} = 5$, $i_{He} = 3$ ning järelikult $C_{P_{H_2}} = 7/2R$ ja $C_{P_{He}} = 5/2R$.

Omandagu vesinik vahetult peale soojendamist temperatuuri, mis on algtemperatuurist ΔT_1 võrra kõrgem ning olgu terve süsteemi tasakaaluline lõpptemperatuur algtemperatuurist ΔT_2 võrra suurem. Heelium saab temperatuuride ühtlustumise ajal soojushulga $3n_0 C_{P_{He}} \Delta T_2$, mis peab võrduma vesiniku poolt ära antava soojushulgaga:

$$n_0 C_{P_{H_2}} (\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3n_0 C_{P_{He}} \Delta T_2$$

ehk

$$\frac{7}{2}(\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3 \cdot \frac{5}{2}\Delta T_2,$$

kust

$$\Delta T_2 = \frac{7}{22}\Delta T_1.$$

Kuna protsess on isobaariline ja nii alguses kui ka lõpus on gaaside temperatuurid võrdsed, siis kehtivad võrdused $pV_{H_2} = n_{H_2}RT$, $p(V_{H_2} + V_{He}) = (n_{He} + n_{H_2})RT = 4n_0RT$. Siit tulenevalt kehtib ka

$$p\Delta V_{H_2} = n_0 R \Delta T_1,$$

$$p\Delta(V_{H_2} + V_{He}) = 4n_0 R \Delta T_2.$$

Järelikult

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\Delta(V_{H_2} + V_{He})}{\Delta V_{H_2}} = \frac{4\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{28}{22}.$$

Seega lõpus on koormus algusega võrreldes $d_2 = \frac{28}{22}d_1 = 7\,\text{cm}$ kõrgemal, järelikult ta nihkub täiendavalt $\Delta d = d_2 - d_1 = 1{,}5\,\text{cm}$ ülespoole.

7. ülesanne (*KÜTTEKEHA*)

Et ruumist eemalduva soojuse hulk on stabiilses olukorras võrdne küttekeha poolt toodetud soojusega, siis $P(T_2) = k(T_2 - T_1)$, $k = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1}$. Teisel juhul jääb k samaks: $P(T_4) = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1}(T_4 - T_3)$, kust on näha, et punkt $(T_4, P(T_4))$ peab asetsema sirgel, mis läbib punkti $(T_3, 0)$ ja on sama tõusuga (k), kui punkte $(T_2, P(T_2))$ ja $(T_1, 0)$ ühendav sirge. Joonistades sellise sirge, saame graafikute lõikepunktist vastuse.

8. ülesanne (*KUUP*)

Välimine ringjoon on loomulikult kera välimine kontuur, tema raadius R_A on võrdne kera raadiusega foto mastaabis. Kerast eemal, piirkonnas D, näeb läbi kuubi põrandat, st piirkond D on valge. Piirkonnas A toimub täielik sisepeegeldumine kera pinnal, seega näeme me sealt põranda peegeldust, mis on samuti valge. Mõõtmise teel võib veenduda, et piirkondade A ja B eraldusjoone raadius R_B on umbes $\sqrt{2}$ korda väiksem R_A-st, st tegemist on põranda ja seinte eraldusjoone peegeldusega. Sestap on piirkond B kollane. Piirkondade B ja C eraldusjoon peab vastama täieliku sisepeegeldumise lõppemisele, st piirkonnas C on näha kera sisemust, mis on sinine, valge põranda taustal. Niisiis on piirkond C sinine. On lihtne näha, et täieliku sisepeegeldumise piirjuhul langemisnurga siinus on $\sin\alpha = R_C/R_A = 1/n$. Seega murdumisnäitaja $n = R_A/R_C \approx 1{,}8$.

9. ülesanne (*KUMERPEEGEL*)

Paneme tähele, et kõverustsenter O, objekt A ning kujutis A' kumerpeeglis asuvad samal sirgel. Seega, kui meil õnnestub leida sirge AA', siis selle lõikepunkt optilise teljega annaks punkti O. Teisest küljest, kiir s, mis läbib punkti A kujutist läätses K_2 ja punkti A' kujutist K_1, jätkub peale murdumist läätses sirgena s' ja läbib nii punkti A kui A'. Tänu sellele leiamegi sirge AA' ja punkti O.

Punkti A' leidmiseks konstrueerime esmalt fokaaltasandi F. Selleks leiame fokaaltasandis lebava punkti — sirge s lõikepunkti sirgega t, mis on paralleelne sirgega s' ja läbib läätse keskpunkti. Kujutisi K_1 ja K_2 ühendav sirge murdub nii, et selle pikenduse lõikepunkt optilise peateljega ongi otsitav kõverustsenter. Punkti A' leiame kui sirge s' lõikepunkti sirgega q', mis peale murdumist läbib fookuse ja punkti K_1 (sest K_1 on A' kujutiseks).

10. ülesanne (*TRAAT*)

Traat võtab kaare kuju (sest Amper'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Kaare raadiuse R saab leida järgmisest võrrandist:

$$a = 2R\sin(L/2R).$$

Väikese kaare-elemendi jaoks (pikkusega αR) välja kirjutatud Amper'i jõu ja mehaanilise pinge tasakaalust leiame pinge traadis: $\alpha RIB = T\alpha$. Eeldusel, et $L \gg a$, moodustub kaarest peaaegu täisring, st $R = L/2\pi$; seega

$$T = LIB/2\pi.$$

E1 (*SÜSTAL*)

Mõõdame pliiatsi teraviku ja nihiku abil süstla diameetri. d. Süstlas tilgutades loeme teatud tilkade arvu, nt $N = 20$ ja sellele vastava süstlas oleva vee ruumalamuudu V. Tilga kukkumisel taskaalustab pindpinevusjõud tilga massi, st $V\rho g/N = 2\pi d\sigma$, millest $\sigma = V\rho g/2N\pi d$.

E2 (*MUST KAST*)

Paneme tähele, et teatud polaaruse puhul patarei pinge rakendamisel läbi lambi ühele klemmipaarile AB alguses lamp põleb, kuid kustub tasapisi. Kui nüüd rakendada AC-le lamp ilma patareita, siis see põleb jällegi alguses, kuid kustub tasapisi. Ilmselt on mustas kastis kondensaator ja diood.

Sama toimub siis, kui patarei rakendada alguses õige polaarsusega klemmipaarile AC ning hiljem tühjendada kondensaator läbi lambi klemmde AB.

Rakendades patarei ja lambi klemmipaarile BC, jääb lamp ühe polaarsuse puhul pidevalt põlema, teise polaarsuse puhul aga ei põle üldse.

Kõigi eksperimentaalsete tähelepanekutega on kooskõlas juuresolev skeem.