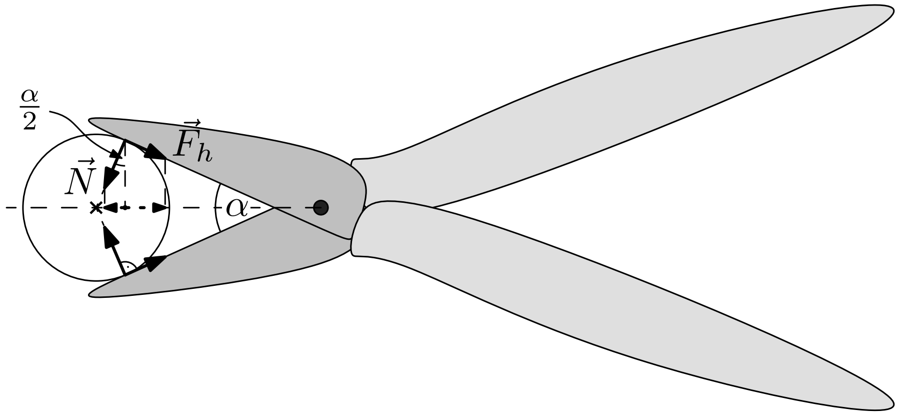
Eesti koolinoorte 56. füüsikaolümpiaad

Lõppvoor. 7. märts 2009. a.

Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. (*NÜRINENUD KÄÄRID*)



Hõõrdejõud peab tasakaalustama toereaktsiooni kääride telje sihilise komponendi (joonis). Lihtsast geomeetriast saame, et $\mu = \tan\frac{\alpha}{2}$.

2. (*KAST KAUBIKUS*)

Kiirendus $a = v_0/t = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$. Newtoni II seaduse põhjal

$$\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_h} + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a}.$$

Nööri pinge on minimaalne, kui hõõrdejud F_h saavutab maksimaalse väärtuse νN. Projektsioon x-teljele:

$$T\sin\alpha + \nu N = ma;$$

y-teljele:

$$N + T\cos\alpha - mg = 0.$$

Lahendades süsteemi ära leiame, et

$$T = m\frac{a - \mu g}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} \approx 14\ \mathrm{N}.$$

3. (*KONDENSAATORID*)

Kogunegu keskmisele kondensaatorile (mahtuvusega $3C$) laeng a ning nurgas paiknevatele kondensaatoritele (mahtuvusega $3C$) laeng b. Vaatleme ülemist vasakpoolset kondensaatorit: selle negatiivsel plaadil on nüüd laeng $-q+a+b$ ning positiivsel plaadil $q+b$. Saame võrrandi:

$$-(-q+a+b) = q+b, \quad q-a-b = q+b, \quad b = -a/2.$$

Lisaks saame pingete võrdsusest:

$$\frac{a}{3C} = \frac{q+b}{C} + \frac{b}{3C}, \quad a = 3q+4b, \quad a+2a = 3q,$$

millest $a = q$.

4. (*RONG TUNNELIS*)

Õhu temperatuur tunnelis kasvab, kuna mootor soojendab tunneli läbimisel selles olevat õhku. Vaatleme rongi liikumist ajavahemiku Δt jooksul. Selle ajaga läbib rong vahemaa $s = v\Delta t$ ja rongist mööduva õhu ruumala on $\Delta V = \pi d^2 s/4$. Õhu mass on $m = \Delta V \rho$ ja moolide arv on

$$N = \frac{m}{M} = \frac{\Delta V \rho}{M} = \frac{\pi d^2 v \Delta t \rho}{4M}.$$

Ideaalse gaasi olekuvõrrandist $pV = \frac{m}{M}RT$ saame avaldada $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$.

Rongi mootoris eraldub samal ajal soojushulk $Q_1 = P\Delta t$.

Üheaatomilise gaasi erisoojus jääval ruumalal on $C_1 = 3/2R$. Seega on kaheaatomilise gaasi erisoojus $C_2 = 5/3 \cdot 3/2R = 5/2R$. Gaasi erisoojus jääval rõhul on seega $C = 5/2R + R = 7/2R$. Õhu soojendamiseks ΔT võrra kulub soojushulk $Q_2 = NC\Delta T$. Võrdsustame soojushulgad Q_1 ja Q_2.

$$NC\Delta T = P\Delta t$$

Asendades leitud avaldised N ja C jaoks saame pärast teisendusi

$$\Delta T = \frac{8PT}{7\pi d^2 v p} = 1{,}8 \text{ K}.$$

5. (*GPS*)

Ajahetkel $t_1 = 75\,\mathrm{s}$ tervisesportlane veel jooksis, sest eelmise perioodi keskmine kiirus polnud veel alanenud ($v_0 = 11\,\mathrm{km/h}$); et ajahetkeks $t_2 = 90\,\mathrm{s}$ oli keskmine kiirus langenud kiiruseni $v_1 = 8\,\mathrm{km/h}$, siis oli ta seisnud juba ajavahemiku τ_1, kus $v_1 T = v_0(T - \tau_1)$ ning $T = 15\,\mathrm{s}$. Seega, $\tau_1 = (1 - \frac{v_1}{v_0})T$. Analoogselt, peale ajahetke t_2 seisis sportlane veel ajavahemiku τ_2, kus $v_2 T = v_3(T - \tau_2)$ ning $v_2 = 3\,\mathrm{km/h}$ ja $v_3 = 1\,4 km/h$. Seega, $\tau_2 = (1 - \frac{v_2}{v_3})T$ ning kogu peatusaeg $\tau = \tau_1 + \tau_2 = T(2 - \frac{v_1}{v_0} - \frac{v_2}{v_3}) \approx 16\,\mathrm{s}$.

6. (*ÕHUAKEN*)

Soojusvahetuskiirus läbi seinte jms

$$P_s = \alpha(t - t_0) = P\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}.$$

Peale selle toimub soojusvahetus sissetuleva õhu abil $P_1 = \dot{\nu}\frac{7}{2}R(t - t_0)$, kus ajaühikus sisenevate moolide arv $\dot{\nu} = v/V$ ja mooli ruumala $V = RT/p_0 = 22{,}4\,\mathrm{l/mol}$. Seega soojusliku tasakaalu tingimuse saab kirja kujul

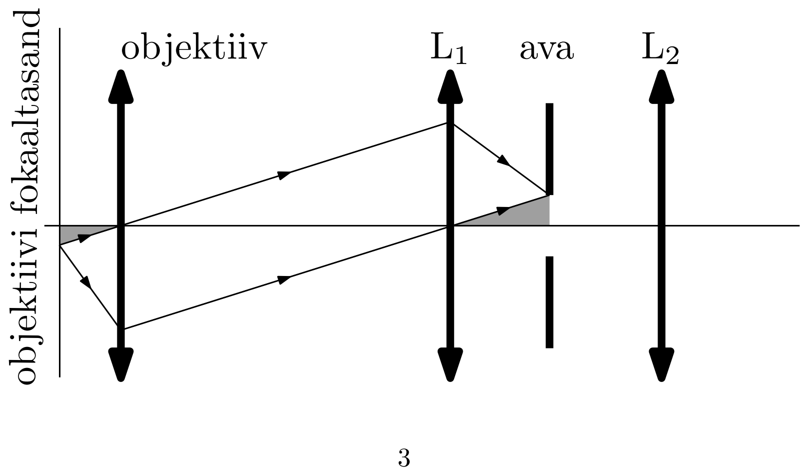
$$P = P\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + c_p\frac{v}{V}(t - t_0),$$

millest

$$t = t_0 + \frac{P}{\frac{P}{t_1 - t_0} + c_p\frac{v}{V}} \approx 13{,}2\,^\circ\mathrm{C}.$$

7. (*KONFOKAALNE MIKROSKOOP*)

Lahenduse optiline skeem on toodud joonisel. Konstrueerimisel tuleb läätsede vahelised kiired joonestada paralleelsed ja läätsede keskpunkte läbivad. Sellisel juhul annavad need kiired eseme ja ava tasandil vastavalt eseme ja kujutise asukohad.



Värvitud kolmnurgad on NNN tunnuse järgi sarnased. Seetõttu kehtib võrdus

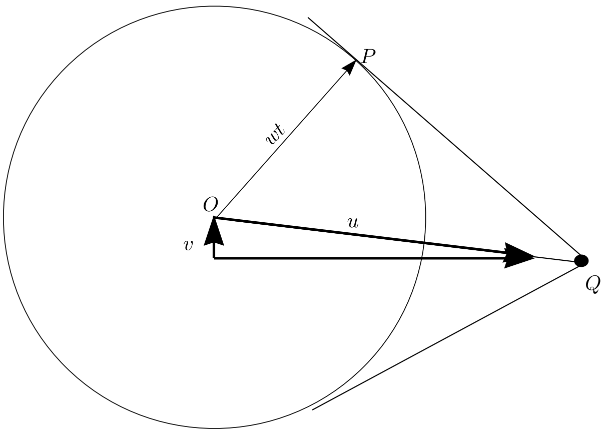
$$\frac{d}{2f_1} = \frac{r_{ese}}{f_{obj}},$$

millest

$$r_{ese} = \frac{d \cdot f_{\text{obj}}}{2f_1}.$$

8. (*KAATER*)

Veega seotud taustsüsteemis liiguvad lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriliselt. Seega, veega seotud taustsüsteemis on paadi trajektoor lainetest moodustatud nurga poolitaja. Paadi kiirusest $\vec{u}$, jõe voolukiirusest $\vec{v}$ ja paadi kiirusest maa suhtes moodustub kiruste kolmnurk, vt joonis. Jooniselt mõõdame selle kolmnurga teravama nurga siinuse, $\sin\alpha = v/u = 0{,}26$, millest $v = 1{,}8\,\mathrm{m/s}$.



Kui paat tekitas teatud punktis häirituse, siis levis see ajaga t kaugusele wt (nähtavaks paadilaineks on selliste ringide mähisjoon), paat aga liikus kaugusele ut. Seega leiame jooniselt pikkuste suhte abil $w/u = OP/OQ = 0{,}64$, millest $w = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$. Järelikult vee sügavus $h = v^2/g = 2\,\mathrm{m}$.

9. (*KOSMOSEPRÜGI*)

Lahendus 1. Masskeskme taustsüsteemis on kerade kaugus minimaalne hetkel, kui süsteem on paigal. d saame energia jäävuse seadusest, mis kehtib, kuna nöör puutehetkel mutrile (sirgena) jõudu ei avalda ega muuda nii põrget plastseks.

Süsteemi masskeskme liikumiskiirus satelliidi süsteemis

$$v_c = \frac{mv}{m + 2M},$$

mutri algkiirus masskeskme süsteemis

$$w = v - v_c = v\left(1 - \frac{m}{m+2M}\right) = v\frac{2M}{m+2M},$$

tehiskaaslase oma

$$W = v_c = \frac{mv}{m+2M}.$$

Energia jäävus masskeskme taustsüsteemis on

$$\frac{mw^2}{2} + \frac{2MW^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{kq^2}{d},$$

kust

$$d = \frac{kq^2}{\frac{mw^2}{2} + MW^2 + \frac{kq^2}{l}} = \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2}\left(\frac{2M}{m+2M}\right)^2 + Mv^2\left(\frac{m}{m+2M}\right)^2 + \frac{kq^2}{l}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}.$$

Lahendus 2. Hetkel, kui keradevaheline kaugus on minimaalne, on satelliidi osad üksteise suhtes paigal. Seega liigub süsteem sel hetkel nagu jäik keha. Võtame inertsiaalse taustsüsteemi, kus tehiskaaslane oli enne kokkupõrget paigal, ja tähistame süsteemi kiiruse minimaalse kauguse saavutamise hetkel kui v_1.

Impulsi jäävusest

$$mv = (m+2M)v_1 \implies v_1 = \frac{mv}{m+2M}.$$

Kehtib ka energia jäävus.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{(m+2M)v_1^2}{2} + \frac{kq^2}{d},$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{m^2v^2}{2(m+2M)} + \frac{kq^2}{d},$$

$$d = \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} - \frac{m^2v^2}{2(m+2M)}} = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}.$$

Vastus:

$$d = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}.$$

10. (*KUNSTINÄITUS*)

Kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte optiliste teepikkuste erinevus on maksimaalne, kui kiir langeb pinnaga risti ning võrdne $\Delta l_{\max} = 2n_1 d$, kus, d on kile paksus. Minimaalne on see siis, kui kiir langeb peaaegu paralleelselt kilega (st horisontaalsel); sellisel juhul on optiliste teepikkuste vahe $\Delta l_{\min} = 2n_1 d/\cos\alpha - 2d\tan\alpha$, kus α on kiles leviva kiire nurk vertikaali suhtes, $\sin\alpha = 1/n_1$. Seega $\Delta l_{\min} = 2d/\cos\alpha(n_1 - \sin\alpha) = 2n_1 d(1-n_1^{-2})/\sqrt{1-n_1^{-2}} = 2n_1 d\sqrt{1-n_1^{-2}}$. Kui muuta vaatesuunda vertikaalsest horisontaalseks, siis muutub optiliste teepikkuste vahe $N\lambda$ võrra (sest selle protsessi käigus on võimalik registreerida N interferentsimaksimumi, mil optiliste teepikkuste vahe on lainepikkuse täisarvkordne). Seega $2n_1 d(1-\sqrt{1-n_1^{-2}}) = N\lambda$, millest

$$d = N\lambda/2n_1(1-\sqrt{1-n_1^{-2}}) \approx 13\mu\text{m}.$$

E1 (*KOORMISE MASS*)

Paneme klotsi nööri otsa rippuma nii, et nöör teeb pool ringi ümber pliiatsi ja hoiame nööri vaba otsa paigal dünamomeetri abil; olgu lugem F_1. Nüüd kordame katset selle erinevusega, et nöör teeb täisringi ümber pliiatsi; olgu lugem F_2. Et $mg/F_1 = F_1/F_2$, siis $m = F_1^2/F_2 g$.

E2 (*TUNDMATU VEDELIK*)

Ühendame kokku süstla ja pudeli. Asetame süstla otsa vedelikku pressinud eelnevalt pudelist välja mõni cm^3 õhku. Süstalt üles alla liigutades leiame koha, kus vedeliku tase süstla sees ühtib vedeliku tasemega anumas. Sellisel juhul on õhurõhk pudelis võrdne välise õhurõhuga. Kehtib

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

kus V on süstla ja pudeli ruumalade summa. Kui nüüd sukeldame süstla sügavamale vedelikku, siis vedeliku samba rõhk suurendab õhurõhku pudelis. Kehtib

$$(V-\Delta V)(p+\Delta p) = \frac{m}{M}RT,$$

seda juhul, kui $T = \text{const}$. Vedeliku samba rõhk

$$\Delta p = \rho_v g\Delta h,$$

kus Δh on vedeliku tasemete erinevus süstlas ja anumas, mille saame mõõtasüstla skaalalt joonlauaga. ΔV on süsteemi pudel ja süstal ruumala muut, milles saame lugeda süstla mahuskaalalt. Kombineerides eelnevat kolme valemit saame,

$$pV = (V-\Delta V)(p+\Delta p)$$

$$pV = (V - \Delta V)(p + \rho_v g \Delta h)$$

$$p\Delta V = (V - \Delta V)\rho_v g \Delta h$$

$$V - \Delta V \approx V, \text{ väikese } \Delta V \text{ korral.}$$

Vedeliku tiheduseks saame:

$$\rho_v = \frac{p\Delta V}{Vg\Delta h}$$

Katseseade on väga tundlik temperatuuri kõikumiste suhtes. Sele vältimiseks kinnitada pudel klambrivahele, sest klambri temperatuur on sama, mis toas oleva õhu temperatuur. Käega pudelist hoidmise korral soojeneb pudelis olev õhk. Näiteks kui temperatuuri muut on $\Delta T = 1$ K, siis püsival rõhul on ruumala muut (temperatuuril 290 K)

$$\frac{V + \Delta V}{V} = \frac{T + \Delta T}{T} \Rightarrow \Delta V \approx 1{,}85 \text{ cm}^3.$$