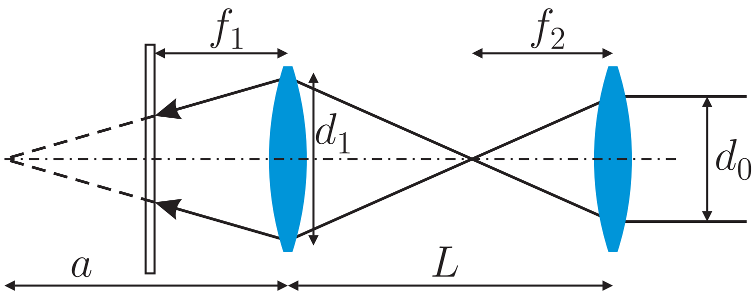
Eesti koolinoorte 62. füüsikaolümpiaad

11. aprill 2015. a. Lõppvoor.
Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. (*ÕHUPALL*) Suurima võimaliku koormise massi korral on õhupalli keskmine tihedus võrdne õhu tihedusega ehk $\rho = \frac{m+M}{V}$, kus m on õhupallis oleva gaasi mass. Siit saame avaldada $m = \rho V - M$. Lisaks kehtib ideaalse gaasi seadus $pV = \frac{m}{\mu}RT$, millest saame $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Nende kahe võrrandi põhjal saame kirjutada $\frac{pV\mu}{RT} = \rho V - M$ ehk $V = \frac{M}{\rho - \frac{p\mu}{RT}}$. Antud arvandmete korral $V = 193\,\mathrm{m}^3$.

2. (*VALGUSTAMINE*) Vaatleme kõige äärmiste valguskiirte liikumist läbi süsteemi.



Pärast lisaläätse läbimist koonduvad valguskiired punktiks lisaläätsest kaugusel f_2 ehk kaugusel $L - f_2$ algsest läätsest. Läätse valemi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L - f_2} = \frac{1}{f_1}. \tag{1}$$

põhjal tekib sellest punktist omakorda punktkujutis kaugusele a esimesest läätsest. Sarnastest kolmnurkadest saame veel kaks võrrandit:

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{L - f_2}{f_2}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{a - f_1} = \frac{d_1}{a}. \tag{3}$$

Kahest esimesest võrrandist saame suuruse $\frac{1}{L-f_2}$ avaldamisel

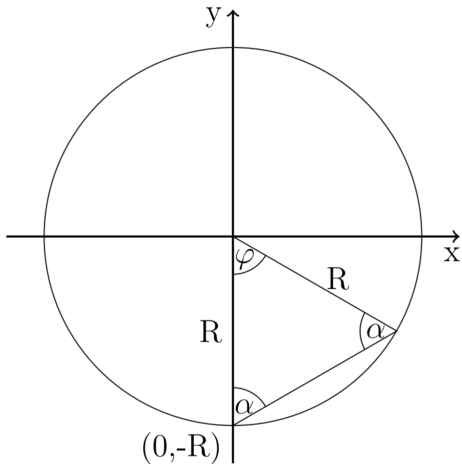
$$\frac{1}{a}+\frac{d_0}{d_1 f_2}=\frac{1}{f_1} \implies \frac{d_0}{d_1 f_2}=\frac{a-f_1}{a f_1}. \tag{4}$$

Võrranditest (3) ja (4) saame avaldada suuruse $d_1(a-f_1)/a$, mille põhjal saame $d=d_0\frac{f_1}{f_2}$. Seega valguslaigu suurus ekraanil sõltub ainult lisatud läätse fookuskaugusest, aga mitte läätsedevahelisest kaugusest L. Valguslaik diameetriga 2 cm tekib kui $f_2=f_1 d_0/d=2\,\mathrm{cm}$.

3. (*UJUV KUUP*) Vaatleme olukorda, kus kuup on sellesse sisenenud vee tõttu parajasti veepinna alla vajunud, sest siis hakkab kuubile mõjuma suurim üleslükkejõud. Piirjuhul on kuubile mõjuv üleslõkkejõud ja raskusjõud tasakaalus ehk $F_r=F_y$. Olgu kuupi tunginud vee mass M, mis avaldub kuubis oleva vee kõrguse h kaudu kui $M=\rho a^2 h$. Jõudude tasakaalu põhjal $F_r=F_y \quad\Rightarrow\quad (m+\rho a^2 h)g=\rho g a^3$, seega $h=\frac{\rho a^3-m}{\rho a^2}=a-\frac{m}{\rho a^2}$. Vesi ei tungi enam kuupi kui õhu rõhk kuubis tasakaalustab vee rõhu ehk $p_0+\rho g(a-h)=p_2$, kus p_2 on õhu rõhk kuubis. Saame $p_2=p_o+\rho g\left(a-a+\frac{m}{\rho a^2}\right)=p_o+\frac{gm}{a^2}$. Õhu ruumala kuubis on $V_2=a^3-a^2h=a^3-a^2\left(a-\frac{m}{\rho a^2}\right)=\frac{m}{\rho}$. Enne augu tekkimist oli rõhu ruumala $V=a^3$. Kuna õhu temperatuur ei muutu, siis $pV=p_2V_2$ ning algne rõhk p kuubis oli $p=\frac{p_2V_2}{V}=\frac{\left(p_o+\frac{gm}{a^2}\right)\cdot\frac{m}{\rho}}{a^3}=\frac{m(p_0a^2+gm)}{a^5\rho}$.

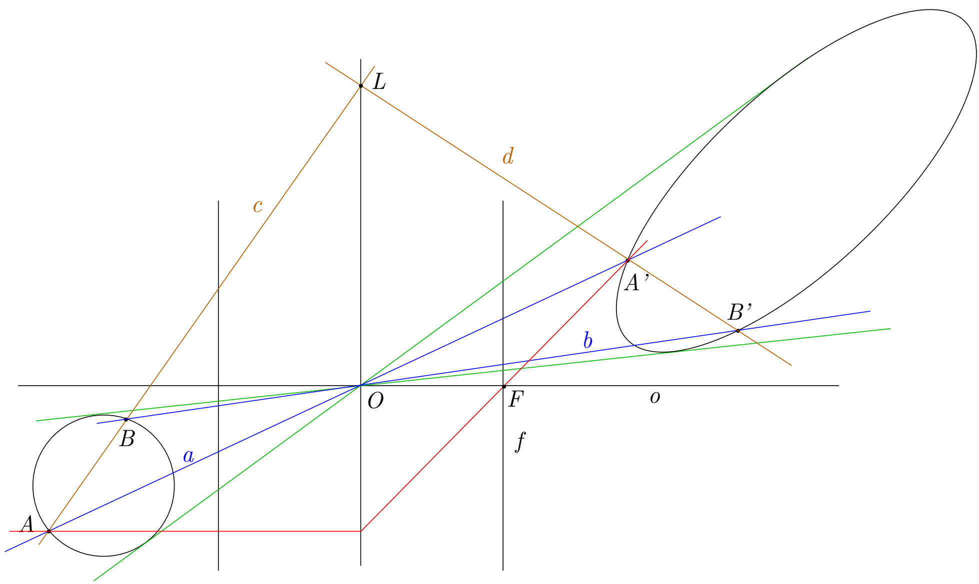
4. (*MUST KAST*) Takistid saavad omavahel olla kas kolmnurk- või tähtühenduses. Ampermeeter ei saa olla otse väljundklemmide vahele lülitatud, sest siis põleks see vastavale klemmipaarile pinge rakendamisel läbi. Samuti ei saa see olla ühegi takistiga rööbiti lülitatud, sest siis ei läbiks vastavat takistit kunagi vool ning sisuliselt tähendaks see takisti asendamist null-takistusega. Sildühendus vajaks viite elementi, meil on aga vaid neli. Niisiis peab ampermeeter olema ühendatud järjestikku ühe takistusega. Tähtühenduse korral ei näitaks ampermeeter voolu, kui pinge on rakendatud vastasklemmidele. Seega saab mustas kastis olla vaid kolmnurkühendus. Kui pinge rakendada nende klemmide vahele, mille vaheline kolmnurga külg ei sisalda ampermeetrit, siis on ampermeetri ahelas kaks järjestikust takistit, järelikult on takistus suurem ja vool väiksem. Ampermeeter peab seega olema sellel kolmnurga küljel, mis ühendab klemme B ja C, sest siis on voolutugevus suurim. Nüüd on lihtne leida kolmnurkühenduse küljel BC oleva takistuse väärtus: $R_{BC} = U/I_{BC} = 2\,\Omega$. Kui pinge rakendada klemmidele A ja B, siis moodustavad kolmnurga küljed AC ja CB ampermeetrit sisaldava järjestikühenduse, $R_{AC} + R_{BC} = U/I_{AB} = 6\,\Omega$ ning $R_{AC} = 6\,\Omega - 2\,\Omega = 4\,\Omega$. Analoogselt leiame, et $R_{AB} + R_{BC} = U/I_{AC} = 3\,\Omega$ ning $R_{AB} = 3\,\Omega - 2\,\Omega = 1\,\Omega$.

5. (*PALLIVISE*) Vaatleme palli lendu jaama teljega seotud inertsiaalses taustsüsteemis. Olgu Juku koordinaadid palli viskamise hetkel $(0, -R)$. Sellisel juhul liigub pall pärast viset ühtlaselt ning sirgjooneliselt, kusjuures selle kiiruse vertikaalsihiline komponent on v ning horisontaalsihiline komponent ωR. Järelikult $\tan\alpha = \frac{\omega R}{v}$, millest saame $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Kuna kehtib $\varphi = \pi - 2\alpha$, siis saame järeldada, et ka $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ning pall läbib enne jaama pinnani jõudmist teepikkuse R. Palli kiirus on $\sqrt{v^2 + \omega^2 R^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega R$, seega on pall õhus aja $t = \frac{\sqrt{3}}{2\omega}$, mille jooksul jõuab jaam pöörduda nurga $\theta = \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ võrra. Järelikult näeb Juku otse üles visatud palli maanduvat enda ees kaugusel $(\varphi - \theta)\,R = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R$.

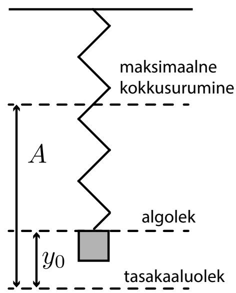


6. (*LÖÖKLAINE*) Läheme üle lööklainega seotud taustsüsteemi, milles osake läheneb lööklainele kiirusega w. Energia jäävusest saame, et juhul kui osake läbib lööklainet, siis $mw^2/2 = qU_0 + mu^2/2$, kus u on osakese kiirus pärast lööklainega kohtumist. Sellest saame $u = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m}$. Tagasi laboratoorsesse süsteemi minnes saame kiiruseks $v = u - w = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m} - w$, mis kehtib, kui $mw^2 > 2qU_0$. Vastasel juhul peegeldub osake lööklainelt ning $u = -w$ ja $v = -2w$.

7. (*RING JA ELLIPS*) Läätse keskpunkt O on ringile ja ellipsile tõmmatud puutujate lõikepunkt, kuna puutepunktid peavad olema originaalikujutise paarid ning neid ühendavad sirged peavad läbima läätse keskpunkti. Läätse tasandi leidmiseks valime ringil kaks punkti A ja B ning leiame nende kujutised ellipsil A' ja B' sirgete AO ja BO ning ellipsi lõikepunktidena. Kui originaal on ringi kahest lõikepunktist see, mis asub läätsest kaugemal, siis selle kujutis on see, mis on läätsele lähemal (ja vastupidi), sest tõeline kujutis on pööratud tagurpidi. Kiir AB peab murduma läätses kiireks $A'B'$, murdepunkt annab meile punkti L läätsel ning sirge OL on läätse tasandiks. Optilise peatelje o leiame sirgele OL punktist O tõmmatud ristsirgena. Fookuse leidmiseks tõmbame punktist A kiire, mis on paralleelne o-ga ja murdub läätsel punkti A' läbivaks kiireks, mille lõikepunkt o-ga annab fookuse F.



8. (*VEDRU*) a) Hetkeks, mil kast maapinnale jõuab, on koormis omandanud kiiruse $v_i = \sqrt{2gh}$. Seejärel hakkab vedru võnkuma ümber uue tasakaaluasendi ehk ümber punkti, kus vedru pinge tasakaalustab koormisele mõjuva raskusjõu: $ky_0 = mg$. Tasakaaluasendisse jõudmiseks peab koormis veel täiendavalt läbima kauguse $y_0 = \frac{mg}{k}$. Olgu vedru võnkumise amplituud A. Kõige ülemises punktis jääb koormis hetkeks seisma ning kokkusurutud vedru avaldab nii koormisele kui kastile jõudu $k(A - y_0)$. Kast hüppab üles tin-

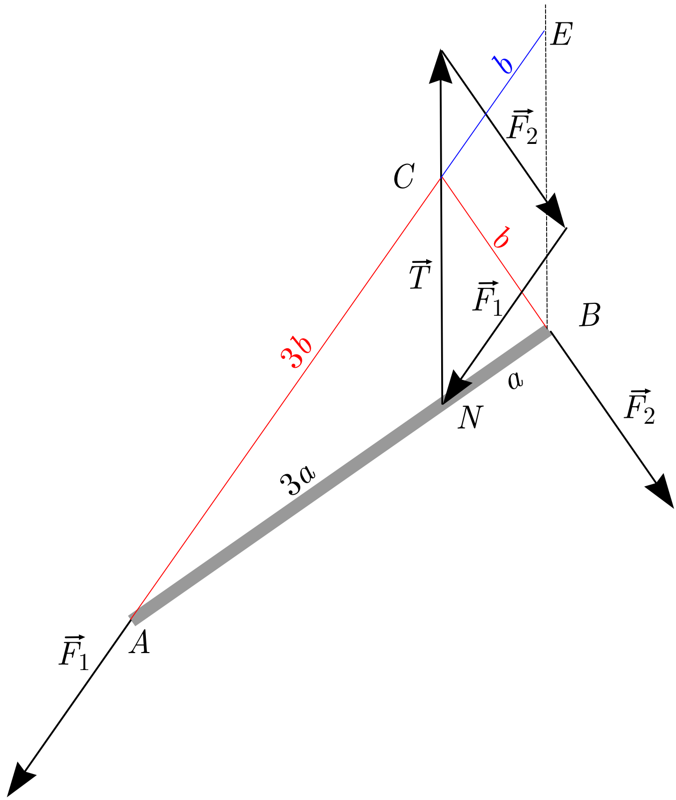


gimusel $mg = k(A - y_0)$, millest $A = \frac{mg}{k} + y_0 = 2y_0$. Rakendame nüüd energia jäävust. Võnkumise ülemises punktis on kineetiline energia muutunud gravitatsiooni ja vedru potentsiaalseks energiaks. $mgh = \frac{mv_i^2}{2} = mg(A - y_0) + \frac{1}{2}k(A - y_0)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) mgy_0 = \frac{3}{2}mgy_0$, millest saame otsitavaks kõrguseks $h_{\min} = \frac{3}{2}y_0 = \frac{3mg}{2k} = \frac{3g}{2\omega^2}$.

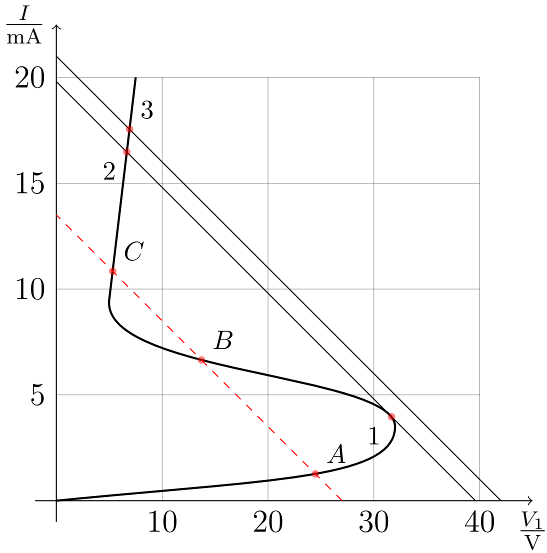
b) Teisele küsimusele vastates lähtume harmoonilise võnkumise omadustest. Veendume esmalt, et konstantse jõu mg lisamine nihutab tasakaaluasendit, kuid jätab võnkumist kirjeldava võrrandi samaks. Tõepoolest, lugedes koordinaadi y alguspunktiks uue tasakaaluasendi, on meie vedru võnkumine kirjeldatav võrrandiga $ma = m\ddot{y} = -k(y - y_0) - mg = -ky$. Sellise võnkumise nurksagedus on muidugi $\omega = \sqrt{k/m}$ ning periood $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Kui hakkaksime aega lugema hetkest, mil koormis läbib tasakaaluasendit, siis kuluks vedru maksimaalselt kokku surumiseks kolm veerandperioodi ($\frac{3}{4}T$: kast liigub alla, tagasi tasakaaluasendisse ja üles), sest langemiskõrguse $h = h_{\min}$ korral saab kast hüpata vaid koormise kõige ülemises asendis. Paraku ei alusta me aja arvestamist mitte tasakaaluasendist, vaid hetkest, mil vedru on välja venitamata. Peame seega arvesse võtma lisaaega Δt, mis kulub koormisel vahemaa y_0 läbimiseks. Kuna koormis ei liigu konstantse kiirendusega, siis seos $s = at^2/2$ siin ei kehti. Δt leidmiseks lähtume harmoonilise võnkumise faasist φ, mis kulub algasendist tasakaaluasendisse jõudmiseks. Seda faasi on lihtne avaldada koordinaatide abil, pidades silmas, et amplituud A vastab koordinaadi faasinihkele $\pi/2$ tasakaaluasendi suhtes. Nimelt $y_0 = A\sin\varphi$, millest $\varphi = \arcsin(y_0/A) = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$. Faasi φ läbimiseks kuluv aeg on $\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{12}T$. Järelikult veedab kast maapinnal kuni üles kerkimiseni aja $t = \frac{3}{4}T + \Delta t = \frac{5}{6}T = \frac{5\pi}{3\omega}$.

9. (*NIIDIGA HANTEL*) Pulgale mõjuvad kolm jõudu. Jõumomentide tasakaalu tõttu peavad nende jõudude rakendussirged lõikuma ühes punktis, olgu see punkt C. Olgu niidi rakenduspunkt N ja pulga otspunktid A ning B, vt joonis. Kuna enne klotsi A paigalt nihkumist pöörleb pulk ümber selle, siis punkti B kiirusvektor on risti AB-ga ning samuti on seda punkti B rakendatud hõõrdejõu vektor; sestap $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$. Et nihkuma hakkamise hetkel on hõõrdejõud võrdsed, siis jõudude kolmnurk $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{T}$ on võrdhaarne, järelikult on võrdhaarne ka jõudude kolmnurgaga sarnane kolmnurk CBE (sirge BE on tõmmatud paralleelsena $\vec{T}$-ga ja E asub

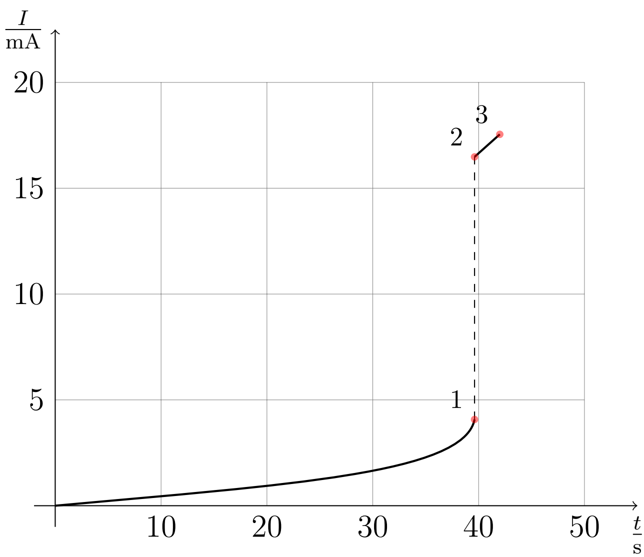
$\vec{F}_1$ rakendussirgel, vt joonis). Olgu $|CB| = b$; siis ka $|CE| = b$. Seetõttu kolmnurkade ANC ja ABE sarnasuse põhjal $|AC| = 3b$. Pythagorase teoreemist kolmnurga ABC jaoks $9b^2 = b^2 + 16a^2$, st $b = \sqrt{2}a$. Seetõttu otsitav nurk $\angle BNC = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \sqrt{2} \approx 0{,}96\,\mathrm{rad} \approx 55°$.



10. (*TÜRISTOR*) Kirchhoffi esimese seaduse põhjal peab suvalise pinge ja voolutugevuse korral kehtima $V_1 = U - IR$, kus V_1 on pinge türistoril T_1. Füüsikaliselt reaalsed on sellised olukorrad, kus V_1 ja I on türistori volt-amperkarakteristiku poolt lubatud. Üldjuhul on mingi pinge U korral kuni kolm lahendit (punane sirge graafikul); punkt B ei ole stabiilne, kuna vastaks negatiivsele takistusele, ning punktid A ja C on lubatud, kuid vastavad erinevatele režiimidele, mis sõltuvad sellest, kuidas punktini jõutud on. Ülaltoodu põhjal on võimalik skitseerida voolutugevuse graafik. Alguses suureneb voolutugevus ligikaudu lineaarselt, sest türistor käitub sarnaselt lineaarsele takistile takistusega $r_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}$, mistõttu on



voolutugevuse graafiku algne tõus $\frac{1}{R+r_1} = \frac{1}{22\,\mathrm{k\Omega}}$. Punkti 1 (pinge 39,6 V, voolutugevus 4,1 mA) läheduses hakkab voolutugevus kiiresti kasvama ning hüppab punkti 2 (pinge 39,6 V, voolutugevus 16,5 mA). Edasi käitub türistor taas lineaarselt takistusega $r_2 = 0{,}24\,\mathrm{k\Omega}$ kuni lõpp-punktini 3 (pinge 42 V, voolutugevus 17,5 mA). Voolutugevuse I_a saab täpsemalt leida kasutades Kirchhoffi seaduseid ja türistori takistust lineaarselt lähendades. Siis saame $I_a = 17{,}54\,\mathrm{mA}$.



Pärast lüliti sulgemist lahendame vooluringi lähtuvalt Kirchhoffi seadustest. $U = IR + V_1 = IR + V_2$, $I = I_1 + I_2$, kus $I_1^0 = -11{,}5\,\mathrm{mA}$ on türistori volt-amper karakteristiku teise lineaarse osa algordinaat. Lahendamiseks eeldame, et T_2 on lineaarses režiimis enne hüpet (sarnaselt punktile A) ning T_1 pärast hüpet (sarnaselt punktile C). Saame $I_1 = I_1^0 + \frac{V_1}{r_2}$ ja $I_2 = V_2/r_1$. Lahendades saame türistoride pingeteks $V_1 = V_2$, voolutugevuseks läbi takisti $I = I_1^0 + V_1/r_1 + V_1/r_2$, pingeks vooluallikal $U = I_1^0 R + V_1 R/r_2 + V_1 R/r_1 + V_1$ ning pingeteks türistoridel $V_1 = V_2 = \frac{U - I_1^0 R}{R/r_1 + R/r_2 + 1} = 6{,}84\,\mathrm{V}$. Seega $I_1 = 17{,}2\,\mathrm{mA}$ ja $I_2 = 0{,}34\,\mathrm{mA}$, mis õigustab tehtud eelduseid.

E1. (*KAKS PALLI*) Riputame pallid paralleelsete pendlitena statiivi külge sarnaselt Newtoni hällile. Mõõdame pendlite pikkused, olgu need $L = 60\,\mathrm{cm}$. Kergitame esimese kuuli üles teatud kõrgusele, kusjuures külgsuunaline nihe olgu $x_0 = 30\,\mathrm{cm}$. Laseme selle liikuma nii, et kuul lendab vastu teist (algselt paigalseisvat) kuuli. Kui põrge oleks absoluutselt elastne, siis vahetaksid kuulid kiiruseid ehk esimene kuul jääks seisma. Kuna põrkel läheb osa energiast kaduma, siis omandab see siiski teatud kiiruse, mille põhjal teemegi kindlaks põrkel kaotatud energia. Püüame teise (algselt paigal olnud) kuuli, mis nüüd märkimisväärse kiiruse omandas, käega kinni ning teeme kindlaks, millise amplituudiga jääb võnkuma esimene kuul. Olgu amplituud $x_1 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$. Paneme tähele, et meetod eeldab täpselt tsentraalset põrget. Kui põrge ei ole tsentraalne, omandab kuul külgsuunalise kiiruse, mille väärtus sõltub esmajoones põrke mitte-tsentraalsusest (ja vähem mitte-elastsusest). Sestap tuleb veenduda, et esimene kuul hakkaks võnkuma enam-vähem enda esialgse liikumise suunas. Kui võnkumissuund on oluliselt pöördunud, tuleb katset korrata seni, kuni õnnestub enam-vähem tsentraalne põrge. Olgu esimese kuuli kiirus enne põrget v_0. Massikeskme süsteemis lähenevad mõlemad kuulid teineteisele kiirusega $\frac{v_0}{2}$. Kui põrkel kaduma läinud energia suhe algsesse kineetilisse energiasse on k, siis pärast põrget on massikeskme süsteemis kuulide kiirused $v_1 = \frac{v_0}{2}\sqrt{1-k}$. Laboratoorses süsteemis on kiirus $v = \frac{v_0}{2} - v_1 = \frac{v_0}{2}(1 - \sqrt{1-k})$. Kiiruste suhte $\frac{v}{v_0}$ saame potentsiaalsete energiate abil: $\frac{v}{v_0} = \sqrt{h_1/h_0}$, kus $h_0 = L - \sqrt{L^2 - x_0^2} \approx 80\,\mathrm{mm}$ ja analoogiliselt $h_1 \approx 0{,}19\,\mathrm{mm}$. Seega $\sqrt{1-k} = 1 - 2\frac{v}{v_0} \approx 0{,}903$, millest $k \approx 0{,}19$ ehk põrkel läheb kaduma umbes 19 % kineetilisest energiast.

E2. (*VALGUSDIOOD*) Ühendame patarei järjestikku takistiga takistusega R ja dioodiga ning mõõdame pinget takistil U_T ja pinget dioodil U_D. Voolutugevus läbi dioodi on $I = U_T/R$. Näeme, et patarei pingest ei piisa selleks, et saada läbi dioodi nõutavat voolutugevust. Seepärast laeme kondensaatori ja ühendame selle järjestikku patareiga, nii et pinge kahekordistub. Alustame takistiga takistusega $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, sest $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ puhul ei saavutaks me soovitud suurimat voolutugevust ($100\,\mu\mathrm{A}$). Vajalikud andmed saame tühjenemise käigus pingeid samaaegselt registreerides. Umbes $I = 10\,\mu\mathrm{A}$ juures (täpne hetk pole tähtis) vahetame vooluringis takistit, sest muidu lähevad takistil mõõdetavad pinged nii väikeseks, et voolu mõõtmiseks kasutatava voltmeetri näidatavate tüvenumbrite arv jääb liiga napiks. Väga väikeste voolude juures (alla $I = 5\,\mu\mathrm{A}$) tühjeneb kondensaator nii aeglaselt, et voolu vähenemist ei jõua ära oodata. Siis tuleb teise takisti abil kondensaatorit järg-järgult tühjendada (st ühendada see mahtuvusega rööbiti). Sobilikku tühjenemisastet saab samal ajal jälgida dioodivoolu abil (st vaadata pinget dioodiga jadamisi oleval takistil).